REZUMAT CURS 2

SERII DE NUMERE REALE

1. Serii numerice convergente si divergente

Fie $\{u_n\}$ un sir de numere reale. Asociem acestui sir urmatorul sir:

$$\begin{aligned} &s_1 = u_1 \\ &s_2 = u_1 + u_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Definitie 1.1. *Perechea* $(\{u_n\}, \{s_n\})$ *se numeste serie definita de sirul* $\{u_n\}$ *si se noteaza cu*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ sau } u_1 + u_2 + \dots u_n + \dots \tag{1}$$

Elementele sirului $\{u_n\}$ se numesc termenii seriei, iar sirul $\{s_n\}$ se numeste sirul sumelor partiale.

Seria (1) se numeste *convergenta* daca sirul sumelor partiale $\{s_n\}$ este convergent, iar limita $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ se numeste *suma seriei* si se obisnuieste sa se scrie:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{2}$$

Daca sirul sumelor partiale $\{s_n\}$ este divergent (nu are limita sau are limita infinita) spunem ca seria (2) este *divergenta*.

Exemple 1.2. ***1. Seria geometrica***

$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$

Suma partiala $s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}$ *pentru* $q \neq 1$.

Daca $|q| < 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ *si deci exista* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$. *Prin urmare, daca* $|q| < 1$ *seria geometrica este convergenta si suma sa este* $s = \frac{a}{1-q}$.

Daca $q = 1$, *atunci* $s_n = n \cdot a$ *si* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$.

Daca $q = -1$, *atunci* $s_n = \begin{cases} a \text{ daca } n \text{ este impar} \\ 0 \text{ daca } n \text{ este par,} \end{cases}$ *deci sirul* s_n *nu are limita in acest caz.*

Daca $q > 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$ *si deci* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$.

Daca $q < -1$, *atunci sirul* $\{q^n\}$ *nu are limita si deci sirul* $\{s_n\}$ *nu are limita.*

In concluzie, pentru $|q| \geq 1$ *seria geometrica este divergenta.*

Studiati natura seriilor

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$1 + 2^{1/2} + 2 + 2^{3/2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^n,$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n.$$

2. Seria armonica

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *este divergenta. In acest caz avem*

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = a_n + \ln n,$$

unde $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ *si* $\lim_{n\to\infty} a_n = c$*(constanta lui Euler). Astfel obtinem* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + \ln n) = \infty$.

3. Seria armonica generalizata

Consideram seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, *numita seria armonica generalizata. Aceasta serie este convergenta daca si numai daca* $\alpha > 1$.

Propozitia 1.3. *Daca seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergenta, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Afirmatia reciproca nu este in general adevarata. Exista serii divergente cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ (de exemplu seria armonica).

Din Propozitia 1.3 rezulta urmatoarea observatie utila in aplicatii:

Observatia 1.4. *Daca* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, *atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergenta.*

Exemplu 1.5. *Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(2+e^{3n})}{\ln(3+e^{2n})}$ *este divergenta.*

Studiati natura seriilor: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sin(1/n)$.

Teorema 1.6 (Criteriul general de convergenta al lui Cauchy)**.** *Conditia necesara si suficienta ca seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *sa fie convergenta este ca pentru* $\forall\ \epsilon > 0$ *sa existe* $n_\epsilon \in \mathbb{N}^*$*, astfel incat pentru* $\forall\ n \geq n_\epsilon$ *si* $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$ *sa avem* $|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \epsilon$.

Observatia 1.7. *Natura unei serii nu se schimba, daca schimbam valorile unui numar finit de termeni ai sai (in particular, daca ii suprimam).*

Intr-adevar, daca $\{s_n\}$ este sirul sumelor partiale al seriei initiale, atunci sirul sumelor partiale ale noii serii, este de forma $\{s_n + c\}$ (incepand de la un anumit rang), unde c este un numar constant.

2. Serii cu termeni pozitivi

Seriile cu termeni pozitivi sunt acele serii in care toti termenii sunt strict pozitivi, adica $u_n > 0$, pentru orice $n \geq 1$.

Teorema 2.1. *Conditia necesara si suficienta ca o serie de termeni pozitivi sa fie convergenta este ca sirul sumelor partiale sa fie marginit.*

Teorema 2.2. *(Criteriul I de comparatie) Fie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *si* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *doua serii cu termeni pozitivi. Presupunem ca exista* $k \in \mathbb{N}^*$ *astfel incat*

$$u_n \leq v_n, \qquad \textit{pentru orice } n \geq k.$$

(i) Daca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *converge rezulta ca si* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge.*

(ii) Daca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *diverge rezulta ca si* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *diverge.*

Observatia 2.3. *In enuntul teoremei anterioare, inegalitatea* $u_n \leq v_n$ *poate fi inlocuita cu inegalitatea* $u_n \leq cv_n$*, pentru orice* $n \geq k$*, unde* c *este o constanta strict pozitiva deoarece natura seriilor* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *si* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cv_n$ *este aceeasi.*

Exemplu 2.4. *Studiati natura seriei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n\sqrt{n}}$.

Studiati natura seriilor: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+1}$ si $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

Teorema 2.5 (Criteriul radacinii al lui Cauchy)**.** *Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi cu proprietatea ca* $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

Daca $l < 1$ *atunci seria este convergenta, iar daca* $l > 1$ *seria este divergenta.*

Observatia 2.6. *Daca* $l = 1$ *nu se poate stabili natura seriei folosind acest criteriu.*

Exemplu 2.7. *Studiati natura seriilor* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

CURS 3

SERII DE NUMERE REALE (CONTINUARE)

1. Serii cu termeni pozitivi (continuare)

Teorema 1.1. *(Criteriul raportului al lui D'Alembert)*

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi avand proprietatea ca exista* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. *Daca* $l < 1$ *seria este convergenta, iar daca* $l > 1$ *seria este divergenta.*

Observatia 1.2. *Daca* $l = 1$ *nu se poate stabili natura seriei folosind acest criteriu.*

Exemplu 1.3. *Sa se studieze natura seriilor* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Teorema 1.4. *(Criteriul Raabe-Duhamel)*

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi avand proprietatea ca exista*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = l.$$

Daca $l > 1$ *atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergenta, iar daca* $l < 1$ *seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este divergenta.*

Observatia 1.5. *Daca* $l = 1$ *nu se poate stabili natura seriei folosind acest criteriu.*

Exemplu 1.6. *Sa se afle natura seriei*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

2. Criterii de convergenta pentru serii cu termeni oarecare

Vom considera acum serii de numere reale, in care termenii pot avea orice semn. Cazul interesant este acela al seriilor care au o infinitate de

termeni pozitivi si o infinitate de termeni negativi. Urmatorul criteriu ne da o conditie suficienta pentru convergenta unei serii cu termeni oarecare.

Teorema 2.1. *(Criteriul Abel-Dirichlet) Fie* $\{a_n\}$ *un sir descrescator de numere pozitive convergent la* 0 *si fie seria* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *cu proprietatea ca sirul sumelor sale partiale* $\{s_n\}$ *este marginit. Atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ *este convergenta.*

Exemplu 2.2. *Sa se afle natura seriei*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos n^2}{n}.$$

Urmatorul criteriu de convergenta se refera la seriile alternate. Prin serie *alternata* se intelege o serie in care termenii sunt alternativi strict pozitivi sau strict negativi. O astfel de serie alternata este de forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots,$$

unde $u_n > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 2.3. *(Criteriul lui Leibniz) Orice serie alternata* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ *cu proprietatea ca sirul* $\{u_n\}$ *este descrescator si convergent la* 0 *este convergenta.*

Exemplu 2.4. *Seria armonica alternata*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \dots,$$

este convergenta deoarece in acest caz $u_n = \frac{1}{n} \searrow 0$.

3. Serii absolut convergente

Definitie 3.1. *O serie cu termeni oarecare* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *se numeste* ***absolut convergenta*** *daca seria* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *este convergenta.*

Teorema 3.2. *Orice serie absolut convergenta este convergenta.*

Observatia 3.3. *Reciproca nu este in general adevarata.*

Exemplu 3.4. *Seria armonica alternata* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ *este convergenta dar nu este absolut convergenta deoarece*

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

este seria armonica care este divergenta.

Definitie 3.5. *O serie convergenta care nu este absolut convergenta se numeste semiconvergenta (sau conditionat convergenta). Astfel seria armonica alternata este semiconvergenta.*

Reamintim o proprietate importanta a sumei finite de numere reale si anume proprietatea de comutativitate(suma nu se modifica daca schimbam ordinea termenilor). In mod natural ne punem problema daca aceasta proprietate se pastreaza si in cazul seriilor convergente. Raspunsul este in general negativ.

Exemplu 3.6. *Consideram seria armonica alternata*

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}. \tag{1}$$

Suma acestei serii este $\lim_{n\to\infty} s_n = \ln 2$.

Pe de alta parte, daca consideram seria

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)+\ldots \tag{2}$$

in care am schimbat ordinea termenilor seriei anterioare. Notand cu $\{\sigma_n\}$ *sirul sumelor partiale obtinem*

$$\begin{aligned}
\sigma_{3n} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)\\
&= \frac{1}{2}s_{2n}.
\end{aligned}$$

Analog se obtin relatiile

$$\sigma_{3n-1} = \frac{1}{2}s_{2n}+\frac{1}{4n}$$

si

$$\sigma_{3n-2} = \sigma_{3n-1} + \frac{1}{4n-2}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \ln 2$ *rezulta ca exista* $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}\ln 2$. *In concluzie seria (2) obtinuta din seria (1) prin schimbarea ordinii termenilor este de asemenea convergenta si are suma* $\frac{1}{2}\ln 2$.

Schimband ordinea termenilor intr-o serie semiconvergenta suma sa se schimba.

Teorema 3.7. *(Riemann) Intr-o serie semiconvergenta se poate schimba ordinea termenilor astfel incat noua serie sa aiba suma egala cu un numar dat dinainte sau astfel incat seria sa devina divergenta.*

Observatia 3.8. *Intr-o serie semiconvergenta nu este permisa schimbarea ordinii termenilor.*

Definitie 3.9. *O serie convergenta care are proprietatea ca suma sa nu se schimba daca se schimba ordinea termenilor se numeste* ***neconditionat convergenta***.

Teorema 3.10. *(Cauchy) Orice serie absolut convergenta este neconditionat convergenta.*

4. Operatii cu serii convergente

Teorema 4.1. *Daca seriile* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *si* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *sunt convergente si au sumele* U *respectiv* V *atunci* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha u_n + \beta v_n)$ *este convergenta si are suma egala cu* $\alpha U + \beta V$.

Teorema 4.2. *Daca seriile* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *si* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *sunt absolut convergente si au sumele* U *respectiv* V *atunci orice serie produs este absolut convergenta si are suma* UV.

CURS 4

SIRURI SI SERII DE FUNCTII

1. Siruri de functii

Fie $E \subset \mathbb{R}$ si $\{f_n\}$ un sir de functii definite pe E cu valori in $\mathbb{R}$. Fie de asemenea $f : E \to \mathbb{R}$.

Definitie 1.1. *Spunem ca sirul de functii $\{f_n\}$ converge* ***simplu****(sau* ***punctual****) pe multimea E la functia f, daca $\forall x \in E$ sirul de numere $\{f_n(x)\}$ converge la $f(x)$. Folosim notatia $f_n \underset{E}{\overset{s}{\longrightarrow}} f$.*

Cand se schimba x se schimba si $\{f_n(x)\}$ astfel $f_n \underset{E}{\overset{s}{\longrightarrow}} f$ daca $\forall x \in E$ si $\forall \varepsilon > 0$ exista un rang $n(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel incat

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n(x, \varepsilon).$$

Exemplu 1.2. *Fie $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. Daca notam cu*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x \in (0, 1] \\ 1, & \text{pentru } x = 1, \end{cases}$$

atunci $f_n \underset{[0,1]}{\overset{s}{\longrightarrow}} f$.

Definitie 1.3. *Spunem ca sirul de functii $\{f_n\}$* ***converge uniform*** *pe multimea E la functia f, daca $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel incat*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon \text{ si } \forall x \in E.$$

In acest caz folosim notatia $f_n \underset{E}{\overset{u}{\longrightarrow}} f$.

Interpretarea geometrica a convergentei uniforme este: pentru $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel incat $\forall n \geq n_\varepsilon$ graficul functiei f_n este cuprins intre graficele functiilor $f - \varepsilon$ si $f + \varepsilon$.

Observatia 1.4. *In definitia convergentei uniforme este important faptul ca rangul n_ε depinde numai de ε si nu depinde si de x.*

Daca presupunem ca functiile f_n, $n \in \mathbb{N}^*$ si f sunt marginite pe multimea E atunci

$$f_n \underset{E}{\overset{u}{\longrightarrow}} f \quad \text{daca si numai daca} \lim_{n\to\infty} \rho_n = 0,$$

unde $\rho_n = \sup\limits_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$.

Observatia 1.5. *Un sir de functii care este uniform convergent pe o multime E este si simplu convergent pe orice submultime $A \subset E$. Afirmatia reciproca nu este adevarata.*

Exemplu 1.6. *Consideram sirul de functii $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ si functia*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{daca } x \in [0,1) \\ 1, & \text{daca } x = 1. \end{cases}$$

Observam ca $f_n \underset{[0,1]}{\overset{s}{\longrightarrow}} f$, *iar*

$$\rho_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1, \quad n \geq 1.$$

Astfel $\rho_n \to 1 \neq 0$ si tinand cont de observatia 1.4 obtinem ca $\{f_n\}$ nu converge uniform la $f$pe multimea $[0,1]$.

Teorema 1.7. *Conditia necesara si suficienta ca un sir de functii $\{f_n\}$ sa convearga uniform pe multimea E la functia f este ca pentru $\forall\varepsilon > 0$ sa existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel incat*

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

pentru orice $x \in E$, $\forall n \geq n_\varepsilon$ si $\forall p \in \mathbb{N}^*$.

O conditie suficienta ca un sir de functii sa convearga uniform este data de urmatoarea propozitie.

Propozitia 1.8. *Daca exista un sir de numere pozitive $\{a_n\}$ cu proprietatea ca $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ si un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel incat*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \quad \forall n \geq n_0 \text{ si } \forall x \in E,$$

atunci $f_n \underset{E}{\overset{u}{\longrightarrow}} f$.

Exemplu 1.9. *Fie $f_n(x) = \frac{2n+\sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$ si $f(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$. Cum pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem*

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|\sin nx|}{n} \leq \frac{1}{n} \to 0$$

rezulta ca $f_n \xrightarrow[E]{u} f$.

In continuare vom stabili in ce conditii o anumita proprietate comuna(continuitate, derivabilitate, integrabilitate,...)a termenilor unui sir de functii se transmite si limitei acestui sir.

Teorema 1.10. *Daca sirul de functii* $f_n \xrightarrow[E]{u} f$ *si daca* f_n *este continua pe* E *pentru fiecare* $n \in \mathbb{N}^*$ *atunci* f *este continua.*

Observatia 1.11. *Daca presupunem ca* $x = a$ *este punct de acumulare al multimii* E *atunci din teorema anterioara avem*

$$\lim_{x\to a}[\lim_{n\to\infty} f_n(x)] = \lim_{n\to\infty}[\lim_{x\to a} f_n(x)].$$

Teorema 1.12. *Daca* $f_n \xrightarrow[[a,b]]{u} f$ *si* f_n *este continua pe* $[a,b]$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$ *atunci exista*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] dx.$$

Teorema 1.13. *Fie* $\{f_n\}$ *un sir de functii derivabile pe* (a,b) *cu proprietatea ca sirul derivatelor* $\{f_n'\}$ *este uniform convergent pe* (a,b). *Daca sirul* $\{f_n\}$ *converge cel putin intr-un punct* $x_0 \in (a,b)$ *atunci* $\{f_n\}$ *converge uniform pe* (a,b) *la o functie* f *care este derivabila pe* (a,b) *si orice* $x \in (a,b)$ *avem*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'(x).$$

Definitie 1.14. *Fie* $\{u_n\}_{n\geq 1}$ *un sir de functii reale definite pe multimea* $E \subset \mathbb{R}$ *si fie* $\{s_n\}_{n\geq 1}$ *sirul sumelor partiale asociat* $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. *Perechea* $(\{u_n\}, \{s_n\})$ *se numeste serie de functii si se noteaza cu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Seria se numeste **simplu convergenta** (uniform convergenta) pe multimea $E_0 \subset E$ daca sirul sumelor partiale $\{s_n\}_{n\geq 1}$ este simplu convergent (uniform convergent) pe E_0.

Cea mai mare submultime $A \subset E$ pe care seria este simplu convergenta se numeste multimea de convergenta a seriei. Deci

$$A = \left\{x_0 \in E;\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ este convergenta}\right\}.$$

Functia $s : A \to \mathbb{R}$ definita prin

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad \forall\, x \in A$$

se numeste suma seriei si se scrie

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + \cdots + u_n + \ldots$$

Teorema 1.15 (Cauchy)**.** *Conditia necesara si suficienta ca seria de functii* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *sa fie uniform convergenta pe multimea* E *este ca pentru* $\forall\, \epsilon > 0$ *sa* $\exists\, n_\epsilon \in \mathbb{N}^*$ *astfel incat*

$$|u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \epsilon, \quad \forall\, n \geq n_\epsilon,\ p \in \mathbb{N}^* \text{ si } \forall\, x \in E.$$

Definitie 1.16. *Un sir de functii* $\{f_n\}$ *definite pe multimea* $E \in \mathbb{R}$ *se numeste* ***uniform marginit*** *pe* E *daca* $\exists\, M > 0$ *astfel incat* $|f_n(x)| \leq M$, $\forall\, x \in E$ *si* $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 1.17. *(Weierstrass) Daca exista o serie numerica cu termeni pozitivi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *convergenta si un rang* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *astfel incat* $|u_n(x)| \leq c_n$, $\forall x \in E$ *si* $\forall n \geq n_0$ *atunci seria de functii* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este uniform convergenta pe* E.

Exemplu 1.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{x^2 + n^2}$ *este uniform convergenta pe* $\mathbb{R}$ *deoarece*

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Este cunoscut ca pentru un numar finit de functii au loc urmatoarele proprietati:

(1) daca functiile sunt continue atunci si suma lor este continua;
(2) integrala sumei este suma integralelor;
(3) derivata sumei este suma derivatelor.

In continuare vom vedea in ce conditii aceste proprietati se pastreaza pentru o infinitate de functii.

Teorema 1.19. *Daca seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *este uniform convergenta pe* E *avand suma* s *si daca functiile* u_n *sunt continue pe* E *atunci si functia* s *este continua.*

Teorema 1.20. *Daca seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *este uniform convergenta pe intervalul* $[a, b]$ *avand suma* s *si daca functiile* u_n *sunt continue pe* E *atunci*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b s(x)dx = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right] dx.$$

Teorema 1.21. *Daca seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *este convergenta cel putin intr-un punct* $x_0 \in (a, b)$ *si daca functiile* u_n *sunt derivabile pe* (a, b) *astfel incat seria derivatelor* $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ *este uniform convergenta pe* (a, b), *avand suma* t, *atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *este uniform convergenta pe* (a, b), *suma sa* s *este derivabila si* $s'(x) = t(x)$, $\forall x \in (a, b)$.

Observatia 1.22. *Teorema anterioara stabileste conditii suficiente ca o serie de functii sa se poata deriva termen cu termen. Relatia* $s'(x) = t(x)$ *se mai poate scrie*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

Exemplu 1.23. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$, $x \in \mathbb{R}$ *este derivabila pe* $\mathbb{R}$, *iar* $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$.

CURS 5

SERII DE PUTERI. FORMULA TAYLOR

1. Serii de puteri

O serie de puteri este o serie de functii de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots, \quad x \in \mathbb{R},$$

unde $\{a_n\}$ este un sir de numere reale.

Daca notam cu A multimea de convergenta a seriei de mai sus atunci observam ca $0 \in A$ si astfel $A \neq \emptyset$.

Lema 1.1. *Daca seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este convergenta in* $x_0 \in \mathbb{R}$ *atunci ea este absolut convergenta in orice punct* $x \in \mathbb{R}$ *cu proprietatea* $|x| < |x_0|$.

Observatia 1.2. *(1) Daca* $x_0 \in A$ *atunci* $(-|x_0|, |x_0|) \subset A$.

(2) Daca $x_0 \notin A$ *si* $|x| > |x_0|$ *atunci* $x \notin A$.

Teorema 1.3. *(Teorema I a lui Abel) Pentru orice serie de puteri exista* $0 \leq \rho \leq \infty$, *cu proprietatile:*

(i) Seria este absolut convergenta pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $|x| < \rho$.

(ii) Seria este divergenta pentru orice $|x| > \rho$.

(iii) Seria este absolut uniform convergenta pe intervalul $[-r, r]$, $\forall 0 < r < \rho$.

Numarul ρ se numeste **raza de convergenta**, iar intervalul $(-\rho, \rho)$ **intervalul de convergenta**.

Teorema urmatoare ne da un procedeu practic de calcul al razei de convergenta.

Teorema 1.4. *(Cauchy-Hadamard) Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *o serie de puteri,* ρ *raza sa de convergenta si* $\omega = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. *Atunci*

(i) daca $\omega = 0$ *atunci* $\rho = \infty$;

(ii) daca $\omega = \infty$ *atunci* $\rho = 0$;

(iii) daca $0 < \omega < \infty$ *atunci* $\rho = \frac{1}{\omega}$.

Sa se determine multimea de convergenta pentru urmatoarele serii de puteri: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ si $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Propozitia 1.5. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri si ρ raza ei de convergenta. Atunci $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ au aceeasi raza de convergenta ρ.*

Observatia 1.6. *Prin derivare sau integrare termen cu termen raza de convergenta a unei serii de puteri nu se schimba.*

Propozitia 1.7. *O serie de puteri se poate deriva termen cu termen sau se poate integra termen cu termen pe intervalul deschis $(-\rho, \rho)$.*

Exemplu 1.8. ***Seria logaritmica***

$$s(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots, \quad x \in (-1, 1].$$

$\rho = 1$, $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1}{1+x}$, $\forall x \in (-1,1)$. Prin integrare, $s(x) = \ln(1+x) + C$, $\forall x \in (-1,1)$. Dar $s(0) = 0 = C$ si astfel $s(x) = \ln(1+x)$, $\forall x \in (-1,1)$.

Teorema 1.9. *(Teorema II a lui Abel) Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avand raza de convergenta $\rho < \infty$ si suma s. Daca seria este convergenta in punctul $x = \rho$ atunci suma sa este continua pe intervalul $(-\rho, \rho]$, iar daca seria este convergenta in $x = -\rho$ atunci s este continua pe intervalul $[-\rho, \rho)$.*

Cum $\rho = 1 \in A$ avem

$$s(1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} s(x) = \ln(2).$$

Exemplu 1.10. *Sa se calculeze multimea de convergenta si suma seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$.*

Exemplu 1.11. *Sa se calculeze suma seriei* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$. *Consideram seria de puteri* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

2. Formula Taylor

Formula Taylor are numeroase aplicatii legate de aproximarea functiilor cu ajutorul polinoamelor. Fie $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I interval deschis. Spunem ca $f \in C^{(p)}(I)$ daca $f, f', \dots, f^{(p)}$ sunt continue pe I. $f \in C^0(I)$ daca f este continua pe I.

Teorema 2.1. *(Formula lui Taylor) Fie* $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in C^{(n+1)}(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ *interval,* $x_0 \in I$ *un punct interior si* $x \in I$. *Atunci are loc urmatoarea formula*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt.$$

formula Taylor cu restul sub forma integrala.

Teorema 2.2. *(Teorema de medie) Fie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua. Atunci exista* $\xi \in [a,b]$ *astfel incat*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

se numeste **polinomul Taylor de gradul** n, iar

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)$$

se numeste **restul formulei Taylor de gradul** n.

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Din teorema de medie exista $\xi \in [x_0, x]$ astfel incat

$$R_n(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)$$

adica exista $\theta \in (0,1)$ astfel incat $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$. Cum $x - \xi = (x - x_0) - \theta(x - x_0) = (1 - \theta)(x - x_0)$ obtinem

$$R_n(x) = \frac{(1-\theta)^n (x - x_0)^{(n+1)}}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),$$

restul Taylor sub forma lui Cauchy.

Formula Taylor cu restul Cauchy este

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &+ \frac{(1-\theta)^n (x - x_0)^{(n+1)}}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)). \end{aligned}$$

Daca $x_0 = 0$ obtinem formula **MacLaurin cu restul sub forma Cauchy**

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(\theta x).$$

REZUMAT CURS 6

FORMULA TAYLOR(CONTINUARE). SERII TAYLOR

1. Formula Taylor(continuare)

Formula Taylor cu restul Cauchy este

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &+ \frac{(1-\theta)^n (x-x_0)^{(n+1)}}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0)). \end{aligned}$$

Daca $x_0 = 0$ obtinem formula **MacLaurin cu restul sub forma Cauchy**

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(\theta x).$$

Teorema 1.1. *Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $g(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [a,b]$ sau $g(x) \leq 0$ pentru orice $x \in [a,b]$. Atunci exista $\xi \in [a,b]$ astfel incat*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

Aplicand aceasta teorema obtinem

$$\int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

formula lui Taylor cu restul lui Lagrange

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \\ &+ \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \end{aligned}$$

Formula MacLaurin cu restul Lagrange este

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x).$$

Exemplu 1.2. *$f(x) = e^x$, iar*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}.$$

Exemplu 1.3. *$f(x) = \sin x$. $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$.*

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin(\theta x + n\pi).$$

Exemplu 1.4. *$f(x) = \ln(1+x)$. $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$. Scrieti formula MacLaurin cu restul Lagrange.*

2. Serii Taylor

Definitie 2.1. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o functie indefinit derivabila pe I ($f \in C^\infty(I)$) si $x_0 \in I$ un punct interior. Seria de functii*

$$(1)\quad f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dots$$

se numeste ***seria Taylor atasata functiei f in $x = x_0$***.

Daca notam cu A multimea de convergenta a seriei (1) atunci $x_0 \in A$ si astfel $A \neq \emptyset$. Din formula Taylor daca $x \in I$ atunci
(2)

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+R_n(x),$$

iar

$$T_n(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

Notam cu

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0), \quad \text{pentru orice } x \in A.$$

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x), \quad \text{pentru orice } x \in A,$$

iar

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad \text{pentru orice } x \in A.$$

Spunem ca f se *dezvolta in serie Taylor in jurul punctului $x = x_0$ pe* $B \subset I \bigcap A$ daca pentru orice $x \in B$ avem
(3)

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dots$$

In particular, daca $x_0 = 0 \in I$ seria (1) devine

$$f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \dots$$

si se numeste *seria MacLaurin*.

Observatia 2.2. *Fie* $f : I \to \mathbb{R}$ *o functie indefinit derivabila pe* I *si* $x_0 \in I$. *In general nu este adevarat ca* f *se poate dezvolta in serie Taylor in jurul punctului* $x = x_0$ *pe multimea* $A \bigcap I$.

Exemplu 2.3.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{daca } x \neq 0 \\ 0, & \text{daca } x = 0. \end{cases}$$

f *este indefinit derivabila pe* $\mathbb{R}$ *si* $f^{(n)}(0) = 0$, *pentru orice* $n \geq 1$. *Seria MacLaurin atasata lui* f

$$0 + \frac{x}{1!}\dot{0} + \frac{x^2}{2!}\dot{0} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\dot{0} + \cdots = 0$$

este convergenta pe $\mathbb{R}$ *si are suma* $s(x) = 0$, *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$ *dar* $f(x) \neq s(x)$, *pentru orice* $x \in \mathbb{R}^*$ *astfel ca* f *nu se dezvolta in serie MacLaurin pe nicio multime* $B \subset \mathbb{R}$, $B \neq \{0\}$.

Teorema 2.4. *Conditia necesara si suficienta ca functia* f *sa se dezvolte in serie Taylor in jurul punctului* $x = x_0$ *pe multimea* $B \subset I \bigcap A$ *este ca* $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, *pentru orice* $x \in B$.

Exemplu 2.5. ***Seria logaritmica***

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \text{ pentru orice } x \in (-1, 1].$$

Exemplu 2.6. ***Seria binomiala***

$$(1+x)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n, \text{ pentru orice } x \in (-1, 1).$$

In acest caz $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - k + 1)$.

Observatia 2.7. *Seria binomiala generalizeaza binomul lui Newton*

$$(1 + x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n.$$

Intr-adevar, $f(x) = (1+x)^n$, $f^{(n)}(x) = n!$, *iar* $f^{(n+1)}(x) = 0$ *si de aceea* $R_n(x) = 0$.

Exemplu 2.8. *Dezvoltati in serie dupa puterile lui* x *functia* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

In acest caz, $\alpha = \frac{-1}{2}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} x^n, \text{ pentru } |x| < 1.$$

Teorema 2.9. *Daca exista* $M > 0$ *astfel incat* $|f^{(k)}(x)| \leq M$ *pentru orice* $x \in B \subset A \bigcap I$ *si* $\forall k \in \mathbb{N}^*$ *atunci*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \ldots, \text{ pentru orice } x \in B.$$

CURS 7

SERII TAYLOR(CONTINUARE)

1. Serii Taylor(continuare)

Teorema 1.1. *Daca exista $M > 0$ astfel incat $|f^{(k)}(x)| \leq M$ pentru orice $x \in B \subset A \bigcap I$ si $\forall k \in \mathbb{N}^*$ atunci*

$$f(x) = f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\cdots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\ldots, \text{ pentru orice } x \in B.$$

Exemplu 1.2. *Sa se dezvolte in serie dupa puterile lui x functia $f(x) = e^x$.*

$f^{(k)}(x) = e^x$. Fie $R > 0$ oarecare atunci $e^x \leq e^R$, pentru orice $x \in [-R, R]$ si $|f^{(k)}(x)| \leq M = e^R$, pentru orice $x \in [-R, R]$ si orice k. Aplicand teorema anterioara $f(x) = e^x$ se dezvolta in serie Taylor pe $[-R, R]$ pentru orice $R > 0$, deci pe $\mathbb{R}$ si

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Exemplu 1.3. *$f(x) = \sin x$. $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$, $|f^{(n)}(x)| \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ si orice n. Astfel*

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Exemplu 1.4.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Formulele lui Euler

$$e^{ix} = 1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \ldots$$
$$e^{-ix} = 1 - i\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + i\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

si obtinem

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Functiile hiperbolice

$$\cosh x \stackrel{def}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

si

$$\sinh x \stackrel{def}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

2. Functii de mai multe variabile

Spatiul $\mathbb{R}^n$

Fie $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, \, i = \overline{1, n}\}$, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ este spatiu vectorial, unde

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

si

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ si $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\| \cdot \|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$$

unde $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ cu

1)$\|x\|_2 \geq 0$ si $\|x\|_2 = 0$ daca si numai daca $x = 0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \dots, 0)$

2)$\|\lambda x\|_2 = |\lambda| \|x\|_2,$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ si $\lambda \in \mathbb{R}$

3)$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2,$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$

este **norma euclidiana**.

O alta norma definita pe $\mathbb{R}^n$ este $\| \cdot \|_\infty$ definita prin

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

unde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

1)$\|x\|_\infty \geq 0$ si $\|x\|_\infty = 0$ daca si numai daca $x = 0_{\mathbb{R}^n}$

2)$\|\lambda x\|_\infty = |\lambda| \cdot \|x\|_\infty$

3)$\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

Observatia 2.1.

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty, \; \textit{pentru orice } x \in \mathbb{R}^n.$$

3. Siruri convergente in $\mathbb{R}^n$

Fie $x_k = (x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk}) \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}^*$ si $l = (l_1, l_2, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definitie 3.1. *Spunem ca x_k este **convergent** in $\mathbb{R}^n$ si are limita l daca*

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - l\|_2 = 0$$

($\|x_k - l\|_\infty = 0$) si scriem $x_k \xrightarrow{\mathbb{R}^n} l$.

Observatia 3.2.

$$\|x_k - l\|_\infty \le \|x_k - l\|_2 \le \sqrt{n}\|x_k - l\|_\infty.$$

Teorema 3.3. *Conditia necesara si suficienta ca $x_k \xrightarrow{\mathbb{R}^n} l$ este ca $x_{ik} \xrightarrow{\mathbb{R}} l_i$ pentru orice $i = \overline{1,n}$.*

Exemplu 3.4.

$$\left(\frac{n+1}{n+3}, \frac{1}{n}, \frac{1-n}{2+3n}\right) \xrightarrow{\mathbb{R}^3} \left(1, 0, -\frac{1}{3}\right).$$

4. Elemente de topologie pe $\mathbb{R}^n$

Reamintim ca

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

atunci pentru $x_k = (x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk}) \in \mathbb{R}^n$ si $l = (l_1, l_2, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ avem

$$\begin{aligned}
x_k \xrightarrow{\mathbb{R}^n} l &\iff \lim_{k\to\infty} \|x_k - l\|_2 = 0 \\
&\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ astfel incat } \|x_k - l\|_2 < \varepsilon,\ \forall k \ge k_\varepsilon \\
&\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ astfel incat } \|x_k - l\|_\infty < \varepsilon,\ \forall k \ge k_\varepsilon \\
&\iff x_{ik} \xrightarrow{\mathbb{R}} l_i,\ \text{ pentru orice } i = \overline{1,n}.
\end{aligned}$$

Definitie 4.1. *Un sir $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ spunem ca este **fundamental** daca*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \text{ astfel incat } \|x_k - x_l\| < \varepsilon,\ \forall k, l \ge k_\varepsilon$$

Teorema 4.2. *Conditia necesara si suficienta ca $\{x_k\}$ sa fie convergent in $\mathbb{R}^n$ este ca $\{x_k\}$ sa fie fundamental in $\mathbb{R}^n$.*

$\mathbb{R}^n$ este un spatiu Banach.

Bila deschisa cu centrul in a si de raza r

$$B_2(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\|_2 < r\}$$
$$B_\infty(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\|_\infty < r\}$$

unde $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ si $r > 0$. Din echivalenta normelor obtinem

$$B_\infty(a; \frac{r}{\sqrt{n}}) \subset B_2(a;r) \subset B_\infty(a;r). \tag{1}$$

Pentru $n = 1$ $\|x\|_2 = \|x\|_\infty = \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, iar $B_2(a;r) = B_\infty(a;r) = \{x \in \mathbb{R}; |x-a| < r\} = (a-r, a+r)$.

Pentru $n = 2$, $a = (a_1, a_2)$,

$$\begin{aligned} B_2(a;r) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \|x-a\|_2 < r\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 < r^2\}, \end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned} B_\infty(a;r) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \|x-a\|_\infty < r\} \\ &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; |x_1-a_1| < r, \ |x_2-a_2| < r\}. \end{aligned}$$

Pentru $n = 3$, $B_2(a;r)$ este interiorul unei sfere cu centrul in a si de raza r, iar $B_\infty(a;r)$ este interiorul cubului de centru a si de raza r.

Definitie 4.3. *Fie $a \in \mathbb{R}^n$. O multime $V \subset \mathbb{R}^n$ spunem ca este **vecinatate pentru** a daca exista $r > 0$ astfel incat $B_2(a;r) \subset V$ ($B_\infty(a;r) \subset V$).*

Notam cu $V(a)$ multimea tuturor vecinatatilor lui a.

Proprietati

1)$a \in V$, $\forall V \in V(a)$;

2)$V \in V(a)$ si $V \subset U$ atunci $U \in V(a)$;

3)$V_1, V_2 \in V(a)$ atunci $V_1 \cap V_2 \in V(a)$;

4)$\forall V \in V(a) \exists W \in V(a), W \subset V$ astfel incat $\forall b \in W$, $V \in V(b)$.

Definitie 4.4. *Fie $A \subset \mathbb{R}^n$. Un punct $a \in A$ se numeste **interior** daca $\exists V \in V(a)$ astfel incat $V \subset A$.*

Notam cu $\mathring{A}$ multimea punctelor interioare ale lui A. Atunci $\mathring{A} \subset A$. Incluziunea inversa nu este in general adevarata.

A este **deschisa** daca $A = \mathring{A}$.

Propozitia 4.5. *Bila deschisa $B(a;r)$ este o multime deschisa.*

Exemple de multimi deschise

Pentru $n = 1$ $(a-r, a+r)$ este deschisa, $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ este multime deschisa.

Pentru $n = 2$, interiorul oricarui cerc, respectiv interiorul oricarui patrat este o multime deschisa.

Pentru $n = 3$, interiorul unui cub, respectiv sfera este o multime deschisa.

Proprietati ale multimilor deschise

1) Orice reuniune de multimi deschise este o multime deschisa.
2) Orice intersectie finita de multimi deschise este deschisa.
3) $\emptyset$ si $\mathbb{R}^n$ sunt deschise.

Definitie 4.6. *Un punct $b \in \mathbb{R}^n$ se numeste **aderent** pentru multimea $A \subset \mathbb{R}^n$ daca $\forall V \in V(b)$, $V \cap A \neq \emptyset$.*

Notam cu $\bar{A}$ multimea punctelor aderente ale lui A. $A \subset \bar{A}$. Incluziunea reciproca nu este in general adevarata.

Definitie 4.7. *Multimea A se numeste **inchisa** daca $\bar{A} \subset A$ $(A = \bar{A})$.*

Teorema 4.8. *Multimea A este inchisa daca si numai daca $CA = \mathbb{R}^n - A$(complementara) este deschisa.*

$\bar{B}_\infty(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\|_\infty \leq r\}$ este bila inchisa, iar $\bar{B}_2(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\|_2 \leq r\}$.

Propozitia 4.9. $\bar{B}(a; r)$ *este o multime inchisa.*

Exemple de multimi inchise

Pentru $n = 1$, $[a - r, a + r]$ este multime inchisa. $[\alpha, \beta]$ este multime inchisa.

Pentru $n = 2$, orice disc este multime inchisa(interiorul unui patrat impreuna cu laturile este de asemenea multime inchisa).

Proprietatile multimilor inchise

1) Orice reuniune finita de multimi inchise este o multime inchisa.
2) Orice intersectie (finita sau infinita) de multimi inchise este tot multime inchisa.
3) $\emptyset$ si $\mathbb{R}^n$ sunt inchise.

CURS 8

FUNCTII DE MAI MULTE VARIABILE

1. Elemente de topologie(continuare)

Teorema 1.1. *a) b este un punct aderent al multimii A daca si numai daca* $\exists \{a_k\} \subset A$ *astfel incat* $a_k \overset{\mathbb{R}^n}{\to} b$.

b) Multimea A este inchisa daca si numai daca limita oricarui sir convergent de elemente din A apartine lui A.

Definitie 1.2. *Un punct* $b \in \mathbb{R}^n$ *este punct* ***de acumulare*** *pentru* A *daca* $\forall V \in V(b)$, $\exists a \in V \cap A$, $a \neq b$.

Notam cu A' multimea punctelor de acumulare ale multimii A. Atunci $A' \subset \overline{A}$.

Observatia 1.3. *Daca* $b \in A'$ *atunci* $\forall V \in V(b)$, $V \cap A$ *contine o infinitate de puncte din A diferite de b si distincte doua cate doua.*

Teorema 1.4. *Un punct* $b \in A'$ *daca si numai daca exista un sir* $\{a_k\}$ *de elemente din A astfel incat* $a_k \neq a_l$ *pentru* $k \neq l$, $a_k \neq b$, *pentru orice k si* $a_k \overset{\mathbb{R}^n}{\to} b$.

Observatia 1.5. *Multimile finite nu au puncte de acumulare.*

Multimile care nu au puncte de acumulare se numesc **discrete**.

Definitie 1.6. *O multime* $A \subset \mathbb{R}^n$ *se numeste* ***marginita*** *daca exista* $M > 0$ *astfel incat* $\|x\| \leq M$, *oricare* $x \in A$.

Teorema 1.7. *(Weierstrass-Bolzano) Orice multime marginita si infinita din* $\mathbb{R}^n$ *are cel putin un punct de acumulare.*

Lema 1.8. *(Cesaro) Orice sir marginit de elemente din* $\mathbb{R}^n$ *contine un subsir convergent.*

2. Limite de functii de mai multe variabile

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in A'$ si $l \in \mathbb{R}$.

Definitie 2.1. *Spunem ca* $l = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ *daca* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ *astfel incat* $\forall (x, y) \in A$ *cu proprietatea* $|x - a| < \delta_\varepsilon$, $|y - b| < \delta_\varepsilon$ *sa avem* $|f(x, y) - l| < \varepsilon$.

Observatia 2.2. *Definitia este echivalenta cu* $\forall (x_n, y_n) \in A$, $(x_n, y_n) \overset{\mathbb{R}^2}{\to} (a, b)$, $(x_n, y_n) \neq (a, b)$ *pentru orice* n *sa avem* $f(x_n, y_n) \overset{\mathbb{R}}{\to} l$.

Exemplu 2.3. *Aratati ca* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$.

Exemplu 2.4. *Aratati ca nu exista* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

3. Limite iterate

$\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x, y))$, $\lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} f(x, y))$.

Exemplu 3.1. $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}) = 1$, *iar* $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}) = -1$.

Teorema 3.2. *Daca exista* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = l$ *atunci exista si limitele iterate* $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x, y)) = \lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} f(x, y)) = l$.

4. Functii continue

Definitie 4.1. *Fie* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *si* $(a, b) \in A'$ *(un punct de acumulare). Atunci* f *este* ***continua in*** (a, b) *daca exista* $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel incat $\forall (x, y) \in A$ cu proprietatea $|x - a| < \delta_\varepsilon$, $|y - b| < \delta_\varepsilon$ sa avem $|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall (x_n, y_n) \in A$, $(x_n, y_n) \overset{\mathbb{R}^2}{\to} (a, b)$ sa avem $f(x_n, y_n) \overset{\mathbb{R}}{\to} f(a, b)$.

Exemplu 4.2. *Functia* $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & daca\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & daca\ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ *este continua in* $(0, 0)$.

5. Continuitate partiala

Definitie 5.1. *Spunem ca* f *este* ***continua in raport cu*** x *in punctul* (a, b) *daca* $\lim\limits_{x\to a} f(x, b) = f(a, b)$ *si este* ***continua in raport cu*** y *daca* $\lim\limits_{y\to b} f(a, y) = f(a, b)$.

Observatia 5.2. *Daca* f *este continua in* (a, b) *in ansamblul variabilelor ea este continua si in raport cu* x *respectiv in raport cu* y. *Reciproca nu este adevarata.*

Exemplu 5.3. *Consideram* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{daca } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{daca } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *si observam ca nu exista* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *deci* f *nu este continua in* $(0,0)$ *dar* $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0 = f(0,0)$ *adica* f *este continua in raport cu* x *in* $(0,0)$ *si* $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0 = f(0,0)$ *adica* f *este continua in raport cu* y *in* $(0,0)$.

Propozitia 5.4. *Daca* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *este continua in* $(a,b) \in A$ *si* $f(a,b) > 0$*(respectiv* < 0*) atunci exista o vecinatate* V *a punctului* (a,b) *astfel incat* $f(x,y) > 0$*(respectiv* < 0*), pentru orice* $(x,y) \in V \cap A$.

Teorema 5.5. *Fie* $f, g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *continue in* $(a,b) \in A$. *Atunci*
(i) $f+g$ *este continua in* (a,b)*;*
(ii) αf *este continua in* (a,b)*, pentru orice* $\alpha \in \mathbb{R}$*;*
(iii) fg *este continua in* (a,b)*;*
(iv) Daca $g(a,b) \neq 0$ *atunci* $\frac{f}{g}$ *este continua in* (a,b).

6. Functii vectoriale

Fie $F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, pentru orice $x \in A$, $F(x) \in \mathbb{R}^m$, $F(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $y_i \in \mathbb{R}$. Daca notam cu $f_i(x) = y_i$, $i = \overline{1,m}$ atunci $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$, unde f_i sunt functii scalare, $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, iar $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$.

Exemplu 6.1. $F(x,y) = (x^2+y^2, xy)$, $F = (f_1, f_2)$ *unde* $f_1(x,y) = x^2+y^2$*, iar* $f_2(x,y) = xy$.

O functie vectoriala $F = (f_1, f_2)$ este continua in (a,b) daca si numai daca componentele sale scalare sunt continue in (a,b).

7. Proprietatile functiilor continue pe o multime compacta

Definitie 7.1. *O multime* $K \subset \mathbb{R}^n$ *se numeste* ***compacta*** *daca este marginita (*$\exists M > 0$ *astfel incat* $\|x\| < M$, $\forall x \in K$*) si inchisa (*$K = \overline{K}$*).*

Proprietati
1) Orice reuniune finita de multimi compacte este compacta.
2) Orice intersectie de multimi compacte este compacta.
3) $\emptyset$ este compacta.
4) Orice multime finita de puncte este compacta.

Exemplu 7.2. *Pentru* $n = 1$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *este o multime compacta.*

Teorema 7.3. *Fie* $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *continua pe* $\mathbb{R}^n$. *Daca* $K \subset \mathbb{R}^n$ *este compacta atunci si* $F(K) \subset \mathbb{R}^m$ *este compacta.*

Teorema 7.4. *Fie* $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *continua pe* K. *Daca* K *este compacta si* $M = \sup f(K)$ *si* $m = \inf f(K)$ *atunci exista* $x_M \in K$ *astfel incat* $f(x_M) = M$ *si exista* $x_m \in K$ *astfel incat* $f(x_m) = m$.

8. Functii uniform continue

Reamintim ca f este continua pe A daca $\forall a \in A$, f este continua in a adica $\forall a \in A$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_{a,\varepsilon} > 0$ astfel incat $\forall x \in A$ cu $|x - a| < \delta_{a,\varepsilon}$ sa avem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Definitie 8.1. *Spunem ca* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este* ***uniform continua pe*** A *daca* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ *astfel incat* $\forall x', x'' \in A$ *cu* $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$ *sa avem* $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Definitie 8.2. *Spunem ca* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *este* ***uniform continua pe*** A *daca* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ *astfel incat* $\forall x', x'' \in A$ *cu* $\|x' - x''\| < \delta_\varepsilon$ *sa avem* $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Observatia 8.3. *Orice functie uniform continua este si continua. Reciproca nu este adevarata.*

Exemplu 8.4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ *este continua pe* $\mathbb{R}$ *dar nu este uniform continua pe* $\mathbb{R}$. *Vrem sa aratam ca* $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\forall \delta > 0$, $\exists x'_\delta, x''_\delta \in A$ *cu* $|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$ *sa avem* $|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq \varepsilon_0$. *Observam ca daca luam* $x' = \sqrt{n+1}$ *si* $x'' = \sqrt{n}$ *atunci* $x' - x'' = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$ *si astfel exista un rang* $n_\delta \in \mathbb{N}^*$ *astfel incat* $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \delta$. *Alegem in continuare* $x'_\delta = \sqrt{n_\delta + 1}$ *si* $x''_\delta = \sqrt{n_\delta}$ *atunci* $|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$ *si* $|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| = n + 1 - n = 1 > \varepsilon_0 = \frac{1}{2}$.

Teorema 8.5. *Fie* $K \subset \mathbb{R}^n$ *o multime compacta. Daca* $f : K \to \mathbb{R}$ *este continua pe* K *atunci* f *este uniform continua pe* K.

Propozitia 8.6. *Daca* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este derivabila si* $\exists M > 0$ *astfel incat* $|f'(x)| \leq M$, *pentru orice* $x \in I$ *atunci* f *este uniform continua pe* I.

Exemplu 8.7. $f(x) = 3x + \sin^2 x$, $x \in \mathbb{R}$. $|f'(x)| \leq 4$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$ *si astfel* f *este uniform continua pe* $\mathbb{R}$.

REZUMAT CURS 9

FUNCTII DE MAI MULTE VARIABILE

1. Multimi conexe (continuare)

Definitie 1.1. *$A \subset \mathbb{R}^n$ este* ***conexa*** *daca $\forall M, N \in A$ exista $\phi : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua astfel incat $\phi(a) = M$, $\phi(b) = N$ si $\phi([a, b]) \subset A$.*

Teorema 1.2. *O multime $A \subset \mathbb{R}$ este* ***conexa*** *daca si numai daca A este un interval.*

Teorema 1.3. *Daca $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este continua si $A \subset \mathbb{R}^n$ este conexa atunci $F(A)$ este conexa.*

Definitie 1.4. *O functie $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe I(interval) daca $\forall J \subset I$ interval atunci $f(J)$ este interval.*

Teorema 1.5. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ continua pe I(interval) atunci f are proprietatea lui Darboux pe I.*

Teorema 1.6. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o functie continua si $f(a)f(b) < 0$. Atunci exista $c \in (a, b)$ astfel incat $f(c) = 0$.*

2. Aplicatii liniare si continue

O aplicatie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este **liniara** daca
1) $T(x + y) = T(x) + T(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$;
2) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ si orice $\lambda \in \mathbb{R}$.

Daca $m = 1$ si $n = 1$ atunci $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este liniara daca si numai daca $\exists a \in \mathbb{R}$ astfel incat $T(x) = ax$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Daca $m = 1$ atunci $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este liniara daca si numai daca $\exists a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel incat $T(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este **liniara** daca si numai daca $\exists A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ astfel incat

$$T(x) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n),$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1. *$\|T(x)\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2$, pentru orice $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, unde $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ si $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$.*

Corolar 2.2. *Daca $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este liniara atunci T este continua pe $\mathbb{R}^n$.*

3. Derivate partiale

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A deschisa si $(a, b) \in A$ atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = f'_x(a, b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} = f'_y(a, b).$$

Daca $x - a = h$ si $y - b = k$ atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

si

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}.$$

Exemplu 3.1. *$f(x, y) = x^3 - 2xy^2 + \ln(x^2 + y^2)$. Calculati $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ si $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.*

Teorema 3.2. *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in \overset{\circ}{A}$ si $V \subset A$ astfel incat $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ si $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ exista pe V si sunt continue in (a, b). Atunci*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b).$$

Exemplu 3.3. *Aratati ca derivatele mixte ale functiei*

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right), & \text{daca } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{daca } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

nu sunt egale.

Observam ca

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} y\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) + \frac{4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{daca } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{daca } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

si

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \textit{daca } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \textit{daca } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Astfel

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = -1$$

si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = 1.$$

4. Functii diferentiabile

Definitie 4.1. *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si $(a,b) \in \overset{\circ}{A}$. Spunem ca f este* ***diferentiabila*** *in $(a,b) \in A$ daca exista $T_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ liniara (continua) astfel incat*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(a+h,b+k) - f(a,b) - T_{a,b}(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

$v = (h,k)$, iar $\|v\|_2 = \sqrt{h^2+k^2}$.

Propozitia 4.2. *Daca f este diferentiabila in (a,b) atunci exista $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ si $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, iar*

$$T_{a,b}(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k.$$

$T_{a,b}$ este diferentiala de ordinul I a functiei f in (a,b) si se noteaza cu $df(a,b) = T_{a,b}$. Astfel $df(a,b) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, liniara si

$$df(a,b)(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k.$$

Exemplu 4.3. *Calculati diferentiala de ordinul I pentru functia $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^3$ in $(2,1)$.*

Diferentiala unei functii de o variabila este $df(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si $df(a)(h) = f'(a)h$.

Observatia 4.4. *Daca notam cu*

$$\omega(x,y) = \begin{cases} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-T_{a,b}(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} & , \textit{ daca } (h,k)\neq(0,0) \\ 0 & , \textit{ daca } (h,k)=(0,0) \end{cases}$$

atunci daca f este diferentiabila in (a,b) rezulta ca $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \omega(h,k) = 0$. In continuare putem scrie

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = T_{a,b}(h,k) + \omega(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

pentru orice (h,k) si notam

$$\phi(h,k) = \omega(h,k)\sqrt{h^2+k^2}.$$

Cu aceasta notatie observam ca $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \phi(h,k) = 0 = \phi(0,0)$ *si* $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\phi(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

CURS 10

FUNCTII DE MAI MULTE VARIABILE

1. Functii diferentiabile(continuare)

Daca notam cu

$$\omega(h,k) = \begin{cases} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-T_{a,b}(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} & , \text{ daca } (h,k) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ daca } (h,k) = (0,0) \end{cases}$$

atunci daca f este diferentiabila in (a,b) rezulta ca $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \omega(h,k) = 0$. In continuare putem scrie

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = T_{a,b}(h,k) + \omega(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

pentru orice (h,k) si notam

$$\phi(h,k) = \omega(h,k)\sqrt{h^2+k^2}.$$

Cu aceasta notatie observam ca $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \phi(h,k) = 0 = \phi(0,0)$ si $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\phi(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$

Obtinem astfel o definitie echivalenta:

Definitie 1.1. *f este diferentiabila in (a,b) daca exista $T_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ liniara (continua) si daca exista V o vecinatate a originii si o functie $\phi = \phi_{a,b} : V \to \mathbb{R}$ continua in (a,b) cu proprietatile $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \phi(h,k) = 0 = \phi(0,0)$ si $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\phi(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ astfel incat*

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = T_{a,b}(h,k) + \phi_{a,b}(h,k).$$

$f(a+h,b+k) - f(a,b) = df(a,b)(h,k) + o(h,k)$ si $f(a+h,b+k) - f(a,b) \approx df(a,b)(h,k)$. Utilizand definitia echivalenta obtinem urmatorul rezultat

Propozitia 1.2. *Daca f este diferentiabila in (a,b) atunci f este continua in (a,b).*

Observatia 1.3. *Exista functii care admit derivate partiale intr-un punct dar care nu sunt diferentiabile in acel punct.*

Exemplu 1.4. *Pentru*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & , \ daca\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & , \ daca\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

avem $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$, *iar* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ *dar cum* f *nu este continua in* $(0,0)$ *rezulta ca* f *nu este nici diferentiabila.*

Definitie 1.5.

$$df(a,b)(h,k)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k,$$

$df(a,b):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *este liniara si astfel in baza canonica* $\{e_1,e_2\}$ *are matricea*

$$J_f(a,b)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\end{pmatrix}$$

deoarece $df(a,b)(1,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ *si* $df(a,b)(0,1)=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

2. Diferentiabilitatea functiilor vectoriale

Definitie 2.1. *Fie* $F=(f,g):A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(a,b)\in\overset{\circ}{A}$. *Atunci* F *este diferentiabila in* (a,b) *daca exista o aplicatie liniara* $T_{a,b}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *astfel incat*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\|F(a+h,b+k)-F(a,b)-T_{a,b}(h,k)\|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0. \tag{1}$$

Astfel

$$T_{a,b}(h,k)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k,\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)k\right)$$

si $dF(a,b)(h,k)=T_{a,b}(h,k)=(df(a,b)(h,k),dg(a,b)(h,k))$.

Observatia 2.2. *Diferentiabilitatea functiilor vectoriale se reduce la diferentiabilitatea componentelor scalare. Prin urmare este suficient sa studiem diferentiabilitatea functiilor scalare deoarece* $dF=(df,dg)$.

Cum $dF(a,b)(1,0)=(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\frac{\partial g}{\partial x}(a,b))$ si $dF(a,b)(0,1)=(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b),\frac{\partial g}{\partial y}(a,b))$ matricea asociata lui $dF(a,b)$ este matricea jacobiana

$$J_F(a,b)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\\ \frac{\partial g}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\end{pmatrix}$$

si

$$\|dF(a,b)(h,k)\|\leq\|J_F(a,b)\|\sqrt{h^2+k^2}$$

pentru orice $(h,k)\in\mathbb{R}^2$.

Observatia 2.3. *F este diferentiabila in (a,b) daca si numai daca*

$$F(a+h,b+k)-F(a,b)=dF(a,b)(h,k)+\psi(h,k)$$

si $\psi(h,k)=o(\sqrt{h^2+k^2})$ ”infinit mic”.

3. Diferentiabilitatea functiilor compuse

$$A\subset\mathbb{R}^2 \overset{F(u,v)}{\to} B\subset\mathbb{R}^2 \overset{f}{\to}\mathbb{R},$$

$(a,b)\in\overset{\circ}{A}$, $(c,d)=(u(a,b),v(a,b))\in\overset{\circ}{B}$.

Teorema 3.1. *Daca F este diferentiabila in (a,b) si f este diferentiabila in (c,d) cu $c=u(a,b)$, $d=v(a,b)$ atunci $g=f\circ F:A\to\mathbb{R}$ este diferentiabila in (a,b) si*

$$dg(a,b)=df(c,d)\circ dF(a,b).$$

Mai mult,

$$J_g(a,b)=J_f(c,d)\cdot J_F(a,b).$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

Exemplu 3.2. *Fie $g(x,y)=f(x^2+y^2,xy)$, $u(x,y)=x^2+y^2$ si $v(x,y)=xy$. Calculati $\frac{\partial g}{\partial x}$ si $\frac{\partial g}{\partial y}$.*

Teorema 3.3. *Fie $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(a,b)\in\overset{\circ}{A}$ astfel incat exista o vecinatate $V\subset A$ cu proprietatea ca exista $\frac{\partial f}{\partial x}$ si $\frac{\partial f}{\partial y}$ pe V si sunt continue in (a,b). Atunci f este diferentiabila in (a,b).*

Corolar 3.4. *Fie $A\subset\mathbb{R}^2$ deschisa. Daca exista $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ si sunt continue pe A atunci f este diferentiabila pe A.*

Definitie 3.5. *Spunem ca $f\in C^1(A)$ daca exista $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ si sunt continue pe A(deschisa).*

Fie $g(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$, unde u, v si f sunt de clasa C^1(au derivate partiale de ordinul I continue). Atunci

$$\begin{cases}\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.\end{cases}\tag{2}$$

4. Derivatele partiale de ordinul II ale functiilor compuse de doua variabile

Definitie 4.1. *Fie* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *este de clasa* $C^2(A)$ *daca exista* $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ *si sunt continue pe multimea A.*

Teorema 4.2. *Fie* $A \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F=(u,v)} B \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *si* $F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$*. Daca* $f \in C^2(B)$*,* $F \in C^2(A)$ *atunci* $g = f \circ F : A \to \mathbb{R}$ *este de clasa* $C^2(A)$ *si au loc urmatoarele relatii*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot (\frac{\partial u}{\partial x})(\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

CURS 12

FUNCTII DE MAI MULTE VARIABILE

1. Formula Taylor pentru functii de mai multe variabile

Fie α, $\beta \in \mathbb{R}^n$ si notam cu $[\alpha, \beta] = \{(1-t)\alpha + t\beta : t \in [0,1]\}$ segmentul inchis de dreapta avand capetele α si β.

Definitie 1.1. *O multime $A \subset \mathbb{R}^n$ se numeste convexa daca pentru orice α, $\beta \in A$ atunci $[\alpha, \beta] \subset A$.*

Observatia 1.2. *Orice bila deschisa $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$ este o multime convexa.*

Teorema 1.3. *(Taylor) Fie $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \overset{\circ}{A}$, $f \in C^{m+1}(A)$ si fie $V \in V(a)$ deschisa si convexa, $V \subset A$. Atunci pentru orice $x \in V$ exista $\xi \in (a, x)$ astfel incat*

$$f(x) = f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!}df(a)(h) + \frac{1}{2!}d^2f(a)(h) + \cdots + \frac{1}{m!}d^m f(a)(h)$$
$$+ \frac{1}{(m+1)!}d^{m+1}f(\xi)(h),$$

unde $h = x - a$.

Daca luam $m = 0$ obtinem formula lui Lagrange

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta)(y - b)$$

sau

$$f(x, y) - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta)(y - b).$$

Reamintim ca

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a)$$

in cazul functiilor de o variabila.

Daca $f = f(x, y, z)$ atunci

$$f(x, y, z) - f(a, b, c) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta, \zeta)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta, \zeta)(y - b) + \frac{\partial f}{\partial z}(\xi, \eta, \zeta)(z - c).$$

2. Extreme locale pentru functii de mai multe variabile

Definitie 2.1. *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in A$. Spunem ca (a, b) este punct de maxim (minim) local pentru f daca exista o vecinatate V a punctului (a, b) astfel incat*

$$f(x, y) \leq f(a, b) \,(\text{ respectiv } f(x, y) \geq f(a, b)), \text{ pentru orice } (x, y) \in V \cap A.$$

Teorema 2.2. *(Férmat) Daca $(a, b) \in \overset{\circ}{A}$, (a, b) este punct de extrem local si f este diferentiabila in (a, b) atunci $df(a, b) = 0$, adica $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ si $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.*

Definitie 2.3. *Un punct (a, b) se numeste punct critic pentru f daca $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ si $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$, adica $df(a, b) = 0$.*

Observatia 2.4. *Din teorema lui Férmat deducem ca punctele de extrem local trebuie cautate printre punctele critice.*

Teorema urmatoare stabileste conditii suficiente ca un punct sa fie punct de extrem local.

Teorema 2.5. *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A deschisa si $f \in C^2(A)$. Daca $(a, b) \in A$ este punct critic pentru f atunci*

(i) daca $d^2 f(a, b)$ este pozitiv definita atunci (a, b) este punct de minim local pentru f;

(ii) daca $d^2 f(a, b)$ este negativ definita atunci (a, b) este punct de maxim local pentru f;

(iii) daca $d^2 f(a, b)$ este alternanta in orice vecinatate a lui (a, b) atunci (a, b) nu este punct de extrem local pentru f.

Demonstraţie. Fie $(x, y) \in V$ arbitrar fixat, $(h, k) = (x - a, y - b)$. Din formula Taylor exista $\xi \in (a, x)$ si $\eta \in (b, y)$ astfel incat

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!} df(a, b)(h, k) + \frac{1}{2!} d^2 f(\xi, \eta)(h, k).$$

Daca $d^2 f(a, b)$ este pozitiv definita atunci $f(x, y) - f(a, b) \geq 0$ si astfel (a, b) este punct de minim pentru f. Daca $d^2 f(a, b)$ este negativ definita atunci $f(x, y) - f(a, b) \leq 0$ adica (a, b) este punct de maxim pentru f. Daca $d^2 f(a, b)$ este alternanta atunci $f(x, y) - f(a, b)$ nu pastreaza semn constant si astfel (a, b) nu este punct de extrem pentru f. □

Corolar 2.6. *Fie $a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$ si $a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$ si notam cu $\Delta_1 = a_{11}$ si $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$.*

Daca $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ *atunci* (a, b) *este punct de minim local pentru* f.

Daca $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ *atunci* (a, b) *este punct de maxim local pentru* f.

Daca $\Delta_2 < 0$ *atunci* (a, b) *nu este punct de extrem local pentru* f.

Exemplu 2.7. *Sa se afle punctele de extrem local pentru functia* $f(x, y) = x^3+y^3+21xy+36x+36y$. *Punctele critice sunt* $M_1(-4, -4)$, $M_2(-3, -3)$ *si primul este punct de maxim, iar celalalt nu este punct de extrem local pentru* f.

CURS 13

FUNCTII DE MAI MULTE VARIABILE

1. Teorema de inversiune locala

Definitie 1.1. *Fie A, $B \subset \mathbb{R}^n$ deschise si $F : A \to B$. F se numeste difeomorfism daca*
(1) $F \in C^1(A)$;
(2) $F : A \to B$ este bijectiva;
(3) $F^{-1} \in C^1(B)$.

Observatia 1.2. *Exista functii bijective de clasa C^1 care nu au inversa de clasa C^1. De exemplu $f(x) = x^3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Evident f este bijectiva, $f \in C^1(\mathbb{R})$ dar $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$ nu este de clasa C^1 deoarece f^{-1} nu este derivabila in $y = 0$.*

Teorema 1.3. *Fie $A \subset \mathbb{R}$ o multime deschisa, $f \in C^1(A)$, $a \in A$. Daca $f'(a) \neq 0$ atunci exista o vecinatate deschisa $I = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A$ a punctului a, $J = (b-\eta, b+\eta) \subset \mathbb{R}$, unde $b = f(a)$ astfel incat $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$ si $f : I \to J = f(I)$ este difeomorfism si $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ pentru orice $y = f(x) \in J$.*

Teorema 1.4. *(Teorema de inversiune locala) Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ deschisa, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$ si $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : A \to \mathbb{R}^n$. Daca $F \in C^1(A)$ si*

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(a) = \det(J_F(a)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix} \neq 0$$

atunci exista o vecinatate deschisa $U \in V(a)$, $U \subset A$, $V \in V(b)$, unde $b = F(a)$ cu proprietatile $\det(J_F(x)) \neq 0$ pentru orice $x \in U$, $F : U \to V = F(U)$ este difeomorfism si

$$\det(J_{F^{-1}}(y)) = \frac{1}{\det(J_F(x))}, \text{ pentru orice } y \in V, y = F(x).$$

2. Functii implicite

Consideram ecuatia

$$F(x, y) = 0,\ (x, y) \in D = [a, b] \times [c, d]. \tag{1}$$

Definitie 2.1. *Daca pentru orice* $x \in [a,b]$ *exista* $y_x \in [c,d]$ *unic astfel incat* $F(x,y_x) = 0$ *atunci functia* $f : [a,b] \to [c,d]$, $f(x) = y_x$, *pentru orice* $x \in [a,b]$ *se numeste functie implicita definita de ecuatia (1).*

Exemplu 2.2. *Fie ecuatia* $x^2+y^2-1 = 0$. *Multimea punctelor din plan care verifica ecuatia anterioara reprezinta din punct de vedere geometric cercul* $C(0,1)$.

Fie $D_1 = [a_1,b_1] \times [c_1,d_1]$ *si se observa ca pentru orice* $x \in [a_1,b_1]$ *exista o singura valoare* $y = y(x) \in [c_1,d_1]$ *astfel incat perechea* (x,y) *verifica ecuatia data, unde* $y(x) = \sqrt{1-x^2}$. *Astfel pe dreptunghiul* D_1 *ecuatia defineste o functie implicita. Pe de alta parte, pe dreptunghiul* $D_2 = [a_2,b_2] \times [c_2,d_2]$ *ecuatia nu defineste nicio functie implicita de forma* $y = y(x)$ *deoarece pentru* $x \in [a_2,-1)$ *nu exista nicio valoare* y *astfel incat* $(x,y) \in C(0,1)$, *iar pentru* $x \in [-1,b_2]$ *exista doua valori* $y_1 = -\sqrt{1-x^2}$ *si* $y_2 = \sqrt{1-x^2}$ *astfel incat* (x,y_1), $(x,y_2) \in C(0,1)$.

Teorema urmatoare stabileste conditii suficiente pentru existenta functiilor implicite.

Teorema 2.3. *(Teorema functiilor implicite) Fie* $F : A \times B \to \mathbb{R}$, A, $B \subset \mathbb{R}$ *multimi deschise,* $(a,b) \in A \times B$ *avand proprietatile*

(1) $F \in C^1(A \times B)$;

(2) $F(a,b) = 0$;

(3) $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$. *Atunci exista o vecinatate deschisa* $U \in V(a)$, *exista o vecinatate deschisa* $V \in V(b)$ *astfel incat* $U \times V \subset A \times B$ *si exista o functie implicita unica* $y = f(x) : U \to V$ *cu proprietatile*

(a) $f(a) = b$, $F[x,f(x)] = 0$, *pentru orice* $x \in U$;

(b) $f \in C^1(U)$ *si*

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))},$$

pentru orice $x \in U$.

Exemplu 2.4. *Aratati ca ecuatia* $x^4+y^4-2x^2y-2x^2-y = 0$ *defineste in* $M(2,1)$ *o functie implicita* $y = y(x)$ *si sa se calculeze* $y'(2)$.

Teorema 2.5. *(Teorema functiilor implicite) Fie* $F : A \times B \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$, $B \subset \mathbb{R}$ *multimi deschise,* $(x_0,y_0,z_0) \in A \times B$ *avand proprietatile*

(1) $F \in C^1(A \times B)$;

(2) $F(x_0,y_0,z_0) = 0$;

(3) $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. *Atunci exista o vecinatate deschisa* U *a punctului* (x_0,y_0), *exista o vecinatate deschisa* $V \in V(z_0)$ *astfel incat* $U \times V \subset A \times B$ *si exista o functie implicita unica* $f : U \to V$ *cu proprietatile*

(a) $f(x_0,y_0) = z_0$, $F[x,y,f(x,y)] = 0$, *pentru orice* $(x,y) \in U$;

(b) $f \in C^1(U)$ si

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))},$$

pentru orice $(x, y) \in U$.

Exemplu 2.6. *Aratati ca ecuatia $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{z^3}{y^2}$ defineste in vecinatatea punctului $M(\sqrt{3}, 1, 2)$, $z = z(x, y)$ si sa se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}(\sqrt{3}, 1)$ si $\frac{\partial z}{\partial y}(\sqrt{3}, 1)$.*

Teorema 2.7. *(Teorema functiilor implicite pentru sisteme) Fie F, $G \in C^1(A)$, $A \subset \mathbb{R}^3$ deschisa si $(x_0, y_0, z_0) \in A$ cu proprietatile*

$$\begin{cases} F(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ G(x_0, y_0, z_0) = 0; \end{cases} \tag{2}$$

$$\frac{D(F, G)}{D(y, z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0. \tag{3}$$

Atunci exista $U \in V(x_0)$, $V \in V(y_0)$ si $W \in V(z_0)$ si exista functiile implicite $y = y(x) : U \to V$, $z = z(x) : U \to W$ cu proprietatile

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = z_0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} F[x, y(x), z(x)] = 0 \\ G[x, y(x), z(x)] = 0, \end{cases} \quad \text{pentru orice } x \in U \tag{5}$$

$$y'(x) = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(x,z)}[x, y(x), z(x)]}{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}[x, y(x), z(x)]} \tag{6}$$

$$z'(x) = -\frac{\frac{D(F,G)}{D(y,x)}[x, y(x), z(x)]}{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}[x, y(x), z(x)]}. \tag{7}$$

Exemplu 2.8. *Sa se arate ca sistemul*

$$\begin{cases} x^3 + 3y^2 - z^2 + x - y - 8 = 0 \\ 2x^2 - 4y - 6z - 6 = 0 \end{cases}$$

defineste in vecinatatea punctului $M(1, 2, -2)$ functiile implicite $y = y(x)$, $z = z(x)$. Sa se calculeze $y'(1)$ si $z'(1)$.

REZUMAT CURS 1

1. Primitive

Definitie 1.1. *Fie $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I interval. Spunem ca $F : I \to \mathbb{R}$ este o primitiva a lui f daca $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in I$.*

Daca F, G sunt primitive pentru f atunci exista $C \in \mathbb{R}$ astfel incat $F(x) = G(x) + C$, pentru orice $x \in I$.

Definitie 1.2. *Fie $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si $F : I \to \mathbb{R}$ o primitiva a sa. Multimea tuturor primitivelor functiei f pe I se noteaza cu $\int f dx$ sau $\int f(x)dx$ si se numeste integrala nedefinita a functiei f.*

Astfel

$$\int f(x)dx = F(x) + \mathcal{C},$$

pentru orice $x \in I$, unde cu $\mathcal{C}$ am notat multimea tuturor functiilor constante pe I.

Reamintim in continuare primitivele functiilor elementare uzuale.

Functia putere

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \mathcal{C}, \quad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \mathcal{C}, \quad x \neq 0.$$

Functia exponentiala

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + \mathcal{C}, \quad a \neq 1, \quad a > 0$$

$$\int e^x dx = e^x + \mathcal{C}.$$

Functii trigonometrice

$$\int \sin x dx = -\cos x + \mathcal{C}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + \mathcal{C}$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + \mathcal{C}, \quad x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + \mathcal{C}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + \mathcal{C}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + \mathcal{C}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + \mathcal{C}, \quad x \in (-1,1)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + \mathcal{C}, \quad x \in (-a,a)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + \mathcal{C}.$$

2. Metode de calcul

1. Integrarea prin parti

Daca f, g sunt de clasa $C^1(I)$ atunci

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Exemplu 2.1. $\int \ln x dx, \quad x > 0.$

$$\int \sin \alpha x dx = -\frac{1}{\alpha}\cos \alpha x + \mathcal{C}$$

$$\int \cos \alpha x dx = \frac{1}{\alpha}\sin \alpha x + \mathcal{C}.$$

2. Schimbarea de variabila Daca $F : J \to \mathbb{R}$ este o primitiva a functiei $f \circ (\phi^{-1})' : J \to \mathbb{R}$, f continua iar $\phi : I \to J$ este o functie bijectiva si de clasa C^1 cu $\phi'(x) \neq 0$, pentru orice $x \in I$ atunci

$$\int f(\phi(x))dx = F(\phi(x)) + \mathcal{C}, \quad \text{pentru orice } x \in I.$$

3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4}}}$$

$x + \frac{b}{2} = t$.

Exemplu 2.2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

4.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{\Delta}{4} - \left(x-\frac{b}{2}\right)^2}}.$$

Exemplu 2.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$.

5. $\int \sqrt{x^2+bx+c}dx = \int \sqrt{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4}}dx$, $x + \frac{b}{2} = t$.

6. Primitivele functiilor rationale $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, P, Q polinoame si $Q(x) \neq 0$, pentru orice $x \in I$.

Cazul I Daca $gr(P) \geq gr(Q)$ efectuam impartirea si obtinem astfel

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

unde C este polinom si $gr(P_1) < gr(Q)$. Folosim in continuare descompunerea in factori ireductibili a polinomului Q,

$$Q(x) = (x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_l)^{k_l}(x^2+b_1x+c_1)^{m_1} \dots (x^2+b_nx+c_n)^{m_n},$$

$b_j^2 - 4c_j < 0$, $j = \overline{1,n}$ si obtinem descompunerea in fractii simple

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{A_{j1}}{x-a_j} + \frac{A_{j2}}{(x-a_j)^2} + \dots \frac{A_{jk_j}}{(x-a_j)^{k_j}} \right) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2+b_jx+c_j} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2+b_jx+c_j)^2} + \dots \frac{B_{jm_j}x + C_{jm_j}}{(x^2+b_jx+c_j)^{m_j}} \right),$$

unde A_{ji}, a_j, B_{ji}, C_{ji}, b_j si c_j sunt numere reale.

Cazul II Daca $gr(P) < gr(Q)$ procedam ca mai inainte folosind descompunerea in fractii simple.

Pentru calculul primitivei unei functii rationale trebuie sa calculam primitive de forma $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$, respectiv $\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}dx$, $b^2-4c<0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}dx &= B\int \frac{x+\frac{C}{B}}{x^2+bx+c}dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\frac{2C}{B}}{x^2+bx+c}dx \\
&= \frac{B}{2}\int \frac{2x+b+\frac{2C}{B}-b}{x^2+bx+c}dx \\
&= \frac{B}{2}\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx + \frac{2C-Bb}{2}\int \frac{dx}{x^2+bx+c} \\
&= \frac{B}{2}\ln(x^2+bx+c) + \frac{2C-Bb}{2}\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}\arctan\frac{x+\frac{b}{2}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}}\right) + \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

Exemplu 2.4. $\int \frac{3x+1}{x^2+4x+7}dx$.

Astfel

$$\begin{aligned}
\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}dx &= B\int \frac{x+\frac{C}{B}}{(x^2+bx+c)^n}dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\frac{2C}{B}}{(x^2+bx+c)^n}dx \\
&= \frac{B}{2}\int \frac{2x+b+\frac{2C}{B}-b}{(x^2+bx+c)^n}dx \\
&= \frac{B}{2}\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}dx + \frac{2C-Bb}{2}\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^n} \\
&= \frac{B}{2}\frac{1}{(1-n)(x^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2C-Bb}{2}\int \frac{dx}{\left[(x+\frac{b}{2})^2+\frac{-\Delta}{4}\right]^n} \\
&= \frac{B}{2}\frac{1}{(1-n)(x^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2C-Bb}{2}\int \frac{dt}{\left[t^2+(\frac{\sqrt{-\Delta}}{4})^2\right]^n},
\end{aligned}$$

unde $t = x+\frac{b}{2}$.

CURS 2

1. Primitive(continuare)

$$\begin{aligned}
\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^n}dx &= B\int \frac{x+\frac{C}{B}}{(x^2+bx+c)^n}dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\frac{2C}{B}}{(x^2+bx+c)^n}dx \\
&= \frac{B}{2}\int \frac{2x+b+\frac{2C}{B}-b}{(x^2+bx+c)^n}dx \\
&= \frac{B}{2}\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}dx + \frac{2C-Bb}{2}\int \frac{dx}{(x^2+bx+c)^n} \\
&= \frac{B}{2}\frac{1}{(1-n)(x^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2C-Bb}{2}\int \frac{dx}{\left[(x+\frac{b}{2})^2+\frac{-\Delta}{4}\right]^n} \\
&= \frac{B}{2}\frac{1}{(1-n)(x^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2C-Bb}{2}\int \frac{dt}{\left[t^2+(\frac{\sqrt{-\Delta}}{4})^2\right]^n},
\end{aligned}$$

unde $t = x+\frac{b}{2}$.

Ne ramane sa calculam urmatoarea primitiva

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}dx.$$

Aplicam in continuare integrarea prin parti si

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}dx &= \int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}xdx = \frac{-x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \int \frac{dx}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} \\
&= \frac{-x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}I_{n-1}.
\end{aligned}$$

Prin urmare

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}\right).$$

7. Integrale binome $I = \int x^m(ax^n+b)^p dx$, unde $m,n,p \in \mathbb{Q}$. Aceste integrale pot fi calculate doar in urmatoarele trei cazuri folosind substitutiile lui Cebasev.

Cazul I Daca $p \in \mathbb{Z}$ facem substitutia $x = t^s$, unde s este numitorul comun al lui m si n. Deoarece $dx = st^{s-1}dt$ I devine

$$I = \int R(t)dt,$$

R fiind functie rationala.

Exemplu 1.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}$, $x > 0$. $x = t^4$.

Cazul II Daca $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, $p \notin \mathbb{Z}$ se face substitutia $ax^n + b = t^r$, unde r este numitorul lui p. Astfel $x = (\frac{t^r-b}{a})^{\frac{1}{n}}$ iar prin diferentiere obtinem $dx = \frac{1}{n}(\frac{t^r-b}{a})^{\frac{1}{n}-1}\frac{rt^{r-1}}{a}dt$. Inlocuind obtinem

$$I = \frac{r}{na}\int \left(\frac{t^r-b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} t^{rp+r+1}dt = \int R(t)dt,$$

deoarece $\frac{m+1}{n} - 1 \in \mathbb{Z}$, $rp \in \mathbb{Z}$ si functia de sub integrala este rationala in t.

Exemplu 1.2. *Sa se calculeze* $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$, *unde* $x \in (-1, 1)$. *Facem schimbarea de variabila* $1 - x^2 = t^2$, *adica* $x = \sqrt{1-t^2}$ *si* $dx = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

Cazul III Daca $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}$ si $p \notin \mathbb{Z}$ facem schimbarea de variabila $\frac{ax^n+b}{x^n} = t^r$, $x \neq 0$, unde r este numitorul lui p. Ca si in celelalte cazuri problema se reduce la calculul primitivei unei functii rationale.

Exemplu 1.3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$, $x > 0$.

2. Integrala definita

Definitie 2.1. *Fie* $I = [a, b]$ *un interval. Se numeste diviziune a intervalului* I *orice submultime* $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ *astfel incat* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, *iar numarul* $\|\Delta\| = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$ *se numeste norma diviziunii* Δ.

Definitie 2.2. *Spunem ca diviziunea* Δ' *este mai fina decat diviziunea* Δ *si notam cu* $\Delta \prec \Delta'$ *daca diviziunea* Δ' *contine pe langa punctele diviziunii* Δ *si alte puncte. Este evident ca* $\|\Delta'\| \le \|\Delta\|$.

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o functie marginita. Notam cu $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ si $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Este evident ca

$$m \le m_i \le M_i \le M, \tag{1}$$

pentru orice $i = \overline{1, n}$.

2.1. **Sume Darboux.**

Definitie 2.3. *Se numeste suma Darboux inferioara (superioara)*

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

respectiv

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Din punct de vedere geometric aceste sume Darboux reprezinta arii. Folosind inegalitatea (1) avem

$$m(b-a) \le s_\Delta \le S_\Delta \le M(b-a), \tag{2}$$

pentru orice diviziune Δ.

Lema 2.4. *Daca* $\Delta \prec \Delta'$ *atunci* $s_\Delta \le s_{\Delta'}$ *si* $S_\Delta \le S_{\Delta'}$.

Lema 2.5. $s_{\Delta'} \le S_{\Delta''}$, *pentru orice doua diviziuni* Δ', Δ'' *ale intervalului* $[a,b]$.

Folosind inegalitatile (2) rezulta ca multimea de numere reale $\{s_\Delta\}_\Delta$ este majorata de $M(b-a)$, iar $\{S_\Delta\}_\Delta$ este minorata de $m(b-a)$. Notam in continuare cu $I_* = \sup\limits_\Delta s_\Delta$ si cu $I^* = \inf\limits_\Delta S_\Delta$. I_* se numeste *integrala inferioara* si I^* se numeste *integrala superioara.*

Teorema 2.6. $I_* \le I^*$.

Definitie 2.7. *Fie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *o functie marginita. Spunem ca* f *este D-integrabila (integrabila in sensul lui Darboux) pe* $[a,b]$ *daca* $I_* = I^* = I$. *Valoarea* I *o notam cu* $\int_a^b f(x)dx$.

Daca $f(x) = c$, pentru orice $x \in [a,b]$, atunci $m = m_i = M_i = M = c$ si $s_\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c(b-a)$, pentru orice diviziune Δ, iar $S_\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c(b-a)$, pentru orice diviziune Δ. Astfel $I_* = I^* = c(b-a)$ si $\int_a^b c dx = c(b-a)$.

Observatia 2.8. *Cum* $I_* = \sup\limits_\Delta s_\Delta$ *rezulta ca* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \Delta_\varepsilon$ *astfel incat* $I_* - \varepsilon < s_{\Delta_\varepsilon} \le I_*$. *Analog,* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \Delta'_\varepsilon$ *astfel incat* $I^* \le S_{\Delta'_\varepsilon} < I^* + \varepsilon$. *Astfel* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \Delta_\varepsilon$ *astfel incat* $I_* - \varepsilon < s_{\Delta_\varepsilon} \le I_* < I^* \le S_{\Delta_\varepsilon} < I^* + \varepsilon$.

Se poate demonstra urmatoarea lema:

Lema 2.9. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ *astfel incat* $\forall \Delta$ *diviziune a inrervalului* $[a,b]$ *cu* $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ *sa avem* $I_* - \varepsilon < s_\Delta \leq S_\Delta < I^* + \varepsilon$.

Teorema 2.10. *(Criteriul de integrabilitate al lui Darboux) Fie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *o functie marginita. Conditia necesara si suficienta ca* f *sa fie integrabila pe* $[a,b]$ *este ca pentru orice* $\varepsilon > 0$ *sa existe* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel incat oricare ar fi diviziunea* Δ *a intervalului* $[a,b]$ *cu* $\|\Delta\| \leq \delta_\varepsilon$ *sa avem* $S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$.

REZUMAT CURS 3

1. Clase de functii integrabile

Teorema 1.1. *Daca* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *este continua atunci* f *este integrabila pe* $[a,b]$.

Teorema 1.2. *Daca* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *este monotona atunci* f *este integrabila pe* $[a,b]$.

2. Sume Riemann. Criteriul de integrabilitate Riemann

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ si $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ un punct oarecare. Daca notam cu $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, atunci *suma Riemann* asociata functiei f, diviziunii Δ si punctelor intermediare ξ_i se noteaza cu $\sigma_\Delta(f;\xi)$ si este prin definitie

$$\sigma_\Delta(f;\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Definitie 2.1. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *este (R)-integrabila (integrabila in sensul lui Riemann)pe* $[a,b]$ *daca exista un numar real finit* I *cu proprietatea:* $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta_\epsilon$ *astfel incat* $\forall \Delta$ *cu* $\|\Delta\| < \delta_\epsilon$ *si* $\forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \Rightarrow |\sigma_\Delta(f,\xi) - I| < \epsilon$.

Teorema 2.2. *Daca* f *este (R)-integrabila pe* $[a,b]$ *atunci* f *este marginita pe* $[a,b]$.

Teorema 2.3. *Fie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *marginita. Atunci* f *este (R)-integrabila pe* $[a,b]$ *daca si numai daca este (D)-integrabila pe* $[a,b]$ *si notam*

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Teorema 2.4 (Criteriul de integrabilitate al lui Riemann)**.** *Conditia necesara si suficienta ca* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *sa fie integrabila pe* $[a,b]$ *este sa existe* $I \in \mathbb{R}$*(finit) cu proprietatea:*

$\forall \{\Delta_n\}$ *diviziuni ale intervalului* $[a,b]$ *cu* $\|\Delta_n\| \to 0$ *si*

$\xi^{(n)}$ *orice punct intermediar pentru* Δ_n *sa avem* $\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^{(n)}) = I$

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabila.

$$\Delta_n : x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n},\ i = \overline{0,n},\ h = \frac{b-a}{n}$$
$$\|\Delta_n\| = h = \frac{b-a}{n} \longrightarrow 0 \text{ cand } n \to \infty$$
$$\xi_i = x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$\sigma_{\Delta_n}(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$
$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left[a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right] \to \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left[a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right].$$

Exemplu 2.5. *Sa se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots \frac{1}{2n}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$
$$= \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln 2.$$

O alta metoda:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}(c + \ln 2n + \epsilon_{2n} - c - \ln n - \epsilon_n)$$
$$= \ln 2 + \lim_{n\to\infty}(\epsilon_{2n} - \epsilon_n) = \ln 2.$$

3. Criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue

Definitie 3.1. *$A \subset \mathbb{R}$ se numeste neglijabila (de masura Lebesgue nula) daca $\forall \epsilon > 0$, exista un sir $\{I_n\}_{n\geq 1}$ de intervale deschise astfel*

incat

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad si \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \epsilon$$

unde $\ell(I_n)$ este lungimea intervalului I_n.(Unele intervale I_n pot fi multimea vida)

Exemplu 3.2. *Fie $A = \{x_0\}$. Atunci A este o multime neglijabila. Fie $I_1 = \left(x_0 - \frac{\epsilon}{3}, x_0 + \frac{\epsilon}{3}\right)$, $I_n = \emptyset$ pentru $n \geq 2$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon$.*

Observatia 3.3. *$\{x_0\}$ este neglijabila.*

Observatia 3.4. *$B \subset A$ si A este neglijabila, atunci si A este neglijabila.*

Observatia 3.5. *Daca A_n este neglijabila pentru orice $n \in \mathbb{N}$ atunci $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ este neglijabila.*

In particular din observatia 3.3 si din observatia 3.5 rezulta ca orice multime finita este neglijabila.

Teorema 3.6 (Criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue)**.** *Conditia necesara si suficienta ca $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sa fie integrabila este:*
i) f sa fie marginita;
ii) multimea punctelor de discontinuitate a lui f sa fie neglijabila.

Definitie 3.7. *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continua pe portiuni daca exista $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$, astfel incat f este continua pe (x_{i-1}, x_i) pentru orice $i = \overline{1, n}$, $f(x_i - 0)$ si $f(x_i + 0)$ sunt finite.*

Din teorema 3.6 rezulta ca functiile continue pe portiuni sunt integrabile.

Teorema 3.8. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabila. Daca $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o functie astfel incat exista $A \subset [a, b]$ finita astfel incat $g(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b] - A$ atunci g este integrabila si*

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Din teorema 3.8 rezulta ca valoarea unei integrale definite nu se schimba daca modificam functia de sub integrala intr-un numar finit de puncte.

4. Proprietati ale integralei definite

1. Daca $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile, atunci $\alpha f + \beta g$ este integrabila pe $[a,b]$ si

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx,$$

pentru orice α, $\beta \in \mathbb{R}$.

$$f \xrightarrow{I} \int_a^b f(x)dx : \mathcal{F}[a,b] \to \mathbb{R},$$

unde $\mathcal{F}$ este multimea functiilor integrabile pe $[a,b]$, $I(f) = \int_a^b f(x)dx$, I aplicatie liniara.

2. Daca f si g sunt integrabile atunci fg este integrabila.

3. Daca $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile si $f \leq g$ pe $[a,b]$ atunci $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

4. Daca f este integrabila atunci $|f|$ este integrabila si $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

5. Teoreme de medie

Teorema 5.1. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabila, $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ si $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Fie $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabila cu proprietatea ca $g \geq 0$ (respectiv $g \leq 0$), pentru orice $x \in [a,b]$. Atunci exista μ cu $m \leq \mu \leq M$ astfel incat*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Corolarul 5.2. *Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabila, $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ si $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Atunci exista μ cu $m \leq \mu \leq M$ astfel incat*

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

Teorema 5.3. *Daca f si g sunt ca in teorema 5.1 si in plus f este continua atunci exista $\xi \in [a,b]$ astfel incat*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Corolarul 5.4. *Daca $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este continua atunci exista $\xi \in [a,b]$ astfel incat*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

6. Formula Leibniz-Newton

Teorema 6.1. *Fie* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua si fie* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, *pentru orice* $x \in [a, b]$. *Atunci* $F'(x) = f(x)$, *pentru orice* $x \in (a, b)$.

Orice functie continua admite primitive.

Teorema 6.2. *(Formula Leibniz-Newton) Fie* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *de clasa* C^1. *Atunci*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx.$$

REZUMAT CURS 4

1. Integrale improprii

Teoria integralei definite s-a facut pana acum pentru functii marginite definite pe un interval compact. In continuare extindem aceasta teorie pentru functii care nu mai sunt marginite sau care nu mai au intevalul de definitie marginit: $\int_a^\infty f(x)dx$ sau $\int_a^b f(x)dx$ cu f nemarginita pe$[a,b]$.

Definitie 1.1. *Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, b finit sau nu ($f:(a,b]\to\mathbb{R}$, a finit sau nu). Presupunem ca f este integrabila pe intervalul compact $[a,u]$, pentru orice $a<u<b$(respectiv f integrabila pe $[u,b]$, pentru orice $a<u<b$). Spunem ca $\int_a^b f(x)dx$ este convergenta daca exista si este finita $\lim\limits_{u\nearrow b}\displaystyle\int_a^u f(x)dx$(respectiv $\lim\limits_{u\searrow a}\displaystyle\int_u^b f(x)dx$) si notam*

$$(v)\int_a^b f(x)dx=\lim_{u\nearrow b}\int_a^u f(x)dx,$$

respectiv

$$(v)\int_a^b f(x)dx=\lim_{u\searrow a}\int_u^b f(x)dx.$$

Daca limita fie nu exista fie este infinita spunem ca integrala este divergenta.

Exemplu 1.2. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\textit{convergenta daca } \alpha>1\\ \textit{divergenta daca } \alpha\le 1.\end{cases}$

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ este convergenta, iar $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}dx$ este divergenta.

Exemplu 1.3. *$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, unde b este finit este convergenta daca $\alpha<1$ si*

$$(v)\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}=\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

si este divergenta daca $\alpha\ge 1$.

In particular, $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ este convergenta, iar $\int_1^2 \frac{dx}{2-x}$ este divergenta.

Exemplu 1.4. *Analog* $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$*, unde* a *este finit este convergenta pentru* $\alpha < 1$ *si divergenta pentru* $\alpha \geq 1$*. In particular,* $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ *este convergenta, iar* $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ *este divergenta.*

Teorema 1.5. *Fie* f*,* $g : [a, b) \to \mathbb{R}_+$ *integrabile pe* $[a, u]$ *pentru orice* $a < u < b$ *si* $f(x) \leq g(x)$*, pentru orice* $x \in [a, b)$*. Atunci*

1) Daca $\int_a^b g(x)dx$ *este convergenta atunci si* $\int_a^b f(x)dx$ *este convergenta;*

2) Daca $\int_a^b f(x)dx$ *este divergenta atunci si* $\int_a^b g(x)dx$ *este divergenta.*

Exemplu 1.6. *1.* $\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x\sqrt{x}}dx$

$$\frac{cos^2 x}{x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

Cum $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ *este convergenta, rezulta conform Teoremei anterioare ca* $\int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x\sqrt{x}}$ *este convergenta.*

2. $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$.

Teorema 1.7. *Fie* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}_+$ *integrabila pe* $[a, u]$*, oricare ar fi* $a < u$*.*

1. Daca $\exists \alpha > 1$ *astfel incat* $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \ell$ *(exista si este finita) atunci* $\int_a^\infty f(x)dx$ *este convergenta.*

2. Daca $\exists \alpha \leq 1$ *astfel incat* $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) > 0$ *atunci* $\int_a^\infty f(x)dx$ *este divergenta.*

Observatia 1.8. *Daca* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *este integrabila pe fiecare interval compact inclus in* $[a, b)$ *si daca* $a < c < b$ *atunci* $\int_a^b f(x)dx$ *este convergenta daca si numai daca* $\int_c^b f(x)dx$ *este convergenta.*

Exemplu 1.9. *1.* $\int_1^\infty \frac{x^2}{x^4+x^2+2}dx$ *este convergenta.*

Teorema 1.10. *Fie* $f : [a, b) \to \mathbb{R}_+$*,* b *finit cu* f *integrabila pe* $[a, u]$*, pentru orice* $a < u < b$ *(respectiv* $f : (a, b] \to \mathbb{R}_+$*,* a *finit si* f *integrabila pe* $[u, b]$*,pentru orice* $a < u < b$*.)*

1. Daca $\exists \alpha < 1$ *astfel incat* $\lim\limits_{x \nearrow b}(b - x)^\alpha f(x) = \ell$ *(respectiv* $\lim\limits_{x \searrow a}(x - a)^\alpha f(x) = \ell$*)(exista si este finita) atunci*

$$\int_a^b f(x)dx \text{ este convergenta.}$$

2. Daca $\exists \alpha \geq 1$ *astfel incat* $\lim\limits_{x \nearrow b}(b-x)^{\alpha} f(x) > 0$ *(respectiv* $\lim\limits_{x \searrow a}(x-a)^{\alpha} f(x) > 0$*) rezulta ca*

$$\int_a^b f(x)dx \text{ este divergenta.}$$

Exemplu 1.11. *1.* $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(2-x)^3}}$

2. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(2-x)}}$

3. $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$

Teorema 1.12 (Cauchy)**.** *Fie* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$*, b finit sau infinit si f integrabila pe* $[a, u]$*, pentru orice* $a < u < b$*. Conditia necesara si suficienta ca* $\int_a^b f(x)dx$ *sa fie convergenta este*

$$\forall \epsilon > 0, \exists a < \delta_\epsilon < b \text{ astfel incat } \left| \int_{u'}^{u''} f(x)dx \right| < \epsilon \ \forall u', u'' \in (\delta_\epsilon, b).$$

Definitie 1.13. $\int_a^b f(x)dx$ *se numeste absolut convergenta daca* $\int_a^b |f(x)|dx$ *este convergenta.*

Teorema 1.14. *Daca* $\int_a^b f(x)dx$ *este absolut convergenta atunci* $\int_a^b f(x)dx$ *este convergenta.*

Exemplu 1.15. $\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ *este convergenta daca* $Q(x) \neq 0$*, grQ* $\geq$*grP*$+2$*.*

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \left| \frac{P(x)}{Q(x)} \right| \text{ exista si este finita,}$$

deci $\int_a^\infty \left| \frac{P(x)}{Q(x)} \right| dx$ *este convergenta, ceea ce implica* $\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ *absolut convergenta si in particular convergenta.*

Observatia 1.16. *1. Fie* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$*, b finit. Daca*

$$\exists \lim_{x \nearrow b} f(x) = \ell \text{ (finita) atunci } \int_a^b f(x)dx \text{ este convergenta.}$$

Exemple 1.17. *1.* $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ *este convergenta deoarece* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$*(finita).*

2. $\int_0^1 \frac{\sin^2(1-x)}{1-x}dx$ *este convergenta deoarece* $\lim\limits_{x \nearrow 1} \frac{\sin^2(1-x)}{1-x} = 0$*.*

CURS 5

Teorema 0.1. *(Criteriul lui Dirichlet) Fie $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, integrabile pe $[a, u]$, $\forall\, a < u < b$, b finit sau infinit.*

Presupunem ca f este continua si $\exists\, M > 0$ astfel incat $|F(u)| < M$, $\forall\, a < u < b$ unde

$$F(u) = \int_a^u f(x)dx$$

si $g \in C^1$, descrescatoare, pozitiva si $\lim\limits_{x \nearrow b} g(x) = 0$.

Atunci $\int_a^b f(x)g(x)dx$ este convergenta.

Integrala lui Dirichlet

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Notam cu $f(x) = \sin x$ si $g(x) = \frac{1}{x}$. $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

$$\left| \int_1^u \sin x dx \right| = |\cos x| \,|_1^u = |\cos 1 - \cos u| < 2, \, \forall u$$

Rezulta ca $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ este convergenta. In concluzie integrala lui Dirichlet este convergenta.

Teorema 0.2. *(Criteriul integral al lui Cauchy) Fie $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_+$, descrescatoare. Atunci $\int_1^\infty f(x)dx$ are aceeasi natura ca si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$.*

Exemplu 0.3. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *este convergenta daca $\alpha > 1$ si divergenta daca $\alpha \leq 1$.*

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \sim \int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x}$ *este divergenta.*

1. Integrale cu parametru

Fie $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$. Pentru fiecare $t \in [c, d]$ $x \to f(x, t) : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabila pe $[a, b]$ atunci integrala va depinde de t, $F(t) = \int_a^b f(x, t)dx$, $F : [c, d] \to \mathbb{R}$. Mai general

Definitie 1.1. *Fie* $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ *si fie* α, $\beta : [c,d] \to [a,b]$. *Daca pentru orice* $t \in [c,d]$ *functia* $x \to f(x,t) : [a,b] \to \mathbb{R}$ *este integrabila atunci* $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ *cu*

$$F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx,$$

pentru orice $t \in [c,d]$ *se numeste integrala cu parametru.*

Teorema 1.2. *(Proprietatea de continuitate)*
Daca $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *este continua si* α, $\beta : [c,d] \to [a,b]$ *sunt continue atunci* $F : [c,d] \to \mathbb{R}$, $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx$ *este continua pentru orice* $t \in [c,d]$.

Exemplu 1.3. *Calculati* $\lim\limits_{t\to 0} \int_0^2 x^2 \cos(tx)dx$.

Teorema 1.4. *(Formula lui Leibniz de derivare a integralei cu parametru) Fie* $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *continua si presupunem ca exista* $\frac{\partial f}{\partial t}$ *si este continua pe* $[a,b]\times[c,d]$, *iar* α, $\beta : [c,d] \to [a,b]$ *sunt derivabile pe* $[c,d]$. *Atunci* $F : [c,d] \to \mathbb{R}$, $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx$, $t \in [c,d]$ *este derivabila pe* $[c,d]$ *si*

$$F'(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx + \beta'(t)f[\beta(t),t] - \alpha'(t)f[\alpha(t),t].$$

Teorema 1.5. *Daca* $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *este continua atunci* $F : [c,d] \to \mathbb{R}$, $F(t) = \int_a^b f(x,t)dx$, $t \in [c,d]$ *este continua pe* $[c,d]$ *si* $\int_c^d F(t)dt = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)dt\right) dx$, *echivalent cu*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)dx\right) dt = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)dt\right) dx.$$

2. Integrale generalizate cu parametru

Definitie 2.1. *Fie* $f : D = [a,b)\times[c,d] \to \mathbb{R}$, b *finit sau nu. Daca pentru orice* $t \in [c,d]$, $\int_a^b f(x,t)dx$ *este convergenta spunem ca* $\int_a^b f(x,t)dx$ *este punctual (simplu) convergenta pe* $[c,d]$. *Echivalent*

$$\forall\, t \in [c,d], \forall\, \epsilon > 0, \exists\, a < \delta_{\epsilon,t} < b \text{ astfel incat } \left|\int_{u'}^{u''} f(x,t)dx\right| < \epsilon,$$

$\forall\, u', u'' \in (\delta_{\epsilon,t}, b)$.

Definitie 2.2. $\int_a^b f(x,t)dx$ *este uniform convergenta pe* $[c,d]$ *daca* $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, \delta_\epsilon > 0$ *astfel incat* $\left|\int_{u'}^{u''} f(x,t)dx < \epsilon\right|$, $\forall, u', u'' \in (\delta_\epsilon, b)$ *si* $\forall t \in [c,d]$.

Teorema 2.3. *Daca* $|f(x,t)| < \varphi(x)$, $\forall (x,t) \in D$ *si* $\int_a^b \varphi(x)dx$ *este convergenta, atunci* $\int_a^b f(x,t)dx$ *este uniform convergenta pe* $[c,d]$.

Exemplu 2.4. $\int_1^\infty \frac{\cos^2(x^2+t^2)}{x^2}$ *este uniform convergenta pe* $\mathbb{R}$.

Lema 2.5. *Fie* $F(t) = \int_a^b f(x,t)dx$, $c \in [c,d]$, b *finit sau nu. Fie* $a < b_n \nearrow b$ *si* $F_n(t) = \int_a^{b_n} f(x,t)dx$. *Atunci daca* $\int_a^b f(x,t)dx$ *este uniform convergenta pe* $[c,d]$ *rezulta ca* $F_n \xrightarrow{u} F$ *pe* $[c,d]$.

Teorema 2.6 (Teorema de continuitate)**.** *Daca* f *este continua pe* D *si* $\int_a^b f(x,t)dx$ *este uniform convergenta pe* $[c,d]$. *Atunci* F *este continua pe* $[c,d]$ *unde*

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)dx.$$

Teorema 2.7. *(Teorema de derivabilitate) Daca* f *si* $\frac{\partial f}{\partial t}$ *sunt continue pe* D, $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$ *este uniform convergenta pe* $[c,d]$ *si* $\int_a^b f(x,t)dx$ *este punctual convergenta pe* $[c,d]$ *atunci* F *este derivabila si*

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx,$$

unde $F(t) = \int_a^b f(x,t)dx$.

Teorema 2.8. *Daca* f *este continua pe* D *si* $\int_a^b f(x,t)dx$ *este uniform convergenta atunci*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)dt\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)dx\right) dt.$$

CURS 6

1. Integrala lui Dirichlet

Calculati $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$.

Consideram integrala cu parametru $F(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx$ cu $t \geq 0$. Astfel $F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$. Deoarece $|\sin x| \leq |x|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $|e^{-tx}\frac{\sin x}{x}| \leq e^{-tx}$, pentru orice x si t. Fie $\lambda > 0$ arbitrar atunci

$$\left|e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right| \leq e^{-tx} \leq e^{-\lambda x},$$

pentru orice $t \geq \lambda$, iar cum $\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$(convergenta) rezulta ca $\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx$ este uniform convergenta pe $[\lambda, \infty)$ deci si pe $(0, \infty)$. Deoarece functia de sub integrala este continua din teorema de continuitate rezulta ca F este continua pe $[0, \infty)$. Astfel $F(0) = \lim\limits_{t \searrow 0} F(t)$. $|F(t)| \leq \int_0^\infty e^{-tx}dx = \frac{1}{t}$ si $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 0$.

Dar $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}(e^{-tx}\frac{\sin x}{x})dx = -\int_0^\infty e^{-tx}\sin x dx$ si $|e^{-tx}\sin x| \leq e^{-ax}$ pentru orice $x \geq 0$, iar $\int_0^\infty e^{-ax}dx$ este convergenta deci $\int_0^\infty e^{-tx}\sin x dx$ este uniform convergenta pe $[a, \infty)$, orice $a > 0$. Aplicand acum teorema de derivare avem

$$F'(t) = -\int_0^\infty e^{-tx}\sin x dx = -\frac{1}{1+t^2}.$$

Integrand obtinem $F(t) = -\arctan t + C$, pentru orice $t > 0$. Dar $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 0 = -\frac{\pi}{2} + C$ si deci $C = \frac{\pi}{2}$. Asadar, $F(0) = \frac{\pi}{2}$.

2. Integralele lui Euler

2.1. **Integralele Euler de speta I (Functia Beta).**

Definitie 2.1. *Se numeste functia beta sau integrala lui Euler de prima speta urmatoarea integrala generalizata cu parametri*

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx, \ a, b > 0.$$

$B(a, b) = \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1$.

Convergenta pe $(0, \frac{1}{2}]$: daca $a \geq 1$ nu se pune problema convergentei deoarece functia de sub integrala este continua pe $[0, \frac{1}{2}]$. Daca $0 < a <$

1 atunci $\lim\limits_{x\to 0} x^{1-a}x^{a-1}(1-x)^{b-1} = 1$, $\alpha = 1-a < 1$ deci $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ este convergenta.

Convergenta pe $[\frac{1}{2}, 1)$: Daca $b \geq 1$ atunci nu se pune problema convergentei, iar daca $0 < b < 1$ atunci $\lim\limits_{x\nearrow 1}(1-x)^{1-b}x^{a-1}(1-x)^{b-1} = 1$ finita cu $\alpha = 1-b < 1$ si astfel integrala este convergenta.

$B(1,1) = 1$ si $B(a,b)$ este convergenta pentru orice $a, b > 0$.

Teorema 2.2. *(Proprietati) Daca $a > 1$ atunci*

$$B(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1}B(a-1,b).$$

In particular pentru $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$ avem

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m_n-1)!}.$$

2.2. **Integrala Euler de speta aII-a (Functia gama).**

Definitie 2.3. *Se numeste functia gama sau functia lui Euler de speta a II-a urmatoarea integrala generalizata cu parametru*

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx,\ a > 0.$$

Descompunem integrala in $\int_0^1 + \int_1^\infty$.

Daca $a \geq 1$ atunci nu se pune problema convergentei pe $[0,1]$ deoarece functia de sub integrala este continua. Daca $0 < a < 1$ atunci $\lim\limits_{x\searrow 0} x^{1-a}e^{-x}x^{a-1} = 1$ finita si astfel $\int_0^1$ este convergenta deoarece $\alpha = 1-a < 1$.

Pentru $\int_1^\infty$: Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-x}x^{a-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{a+1}}{e^x} = 0$, $\alpha = 2 > 1$ rezulta ca $\int_1^\infty$ este convergenta. In concluzie $\Gamma(a)$ este convergenta pentru orice $a > 0$. In plus, $\Gamma(1) = 1$ si $\Gamma(a+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^a dx = -x^ae^{-x}|_0^\infty + a\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx = a\Gamma(a)$.(Functia Γ generalizeaza factorialul)

Exemplu 2.4. *(Integrala Poisson) $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Atunci $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx = \int_0^\infty \frac{e^{-t^2}}{t}2tdt = 2\int_0^\infty e^{-t^2}dt = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \pi$. In continuare, $\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$.*

3. Drumuri parametrizate

Definitie 3.1. *Se numeste drum parametrizat orice functie vectoriala continua $r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I = [a,b]$.*

Ecuatiile

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \end{cases}$$

$t \in [a, b]$ *se numesc ecuatiile parametrice ale drumului.*

$\overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$, $t \in I$.

Definitie 3.2. *Se numeste suportul drumului* r,

$$r(I) = \{(x(t), y(t), z(t)) : t \in I\}.$$

Daca I *este un interval compact* $[a, b]$ *atunci suportul sau este o multime compacta si conexa. Punctele* $r(a)$ *si* $r(b)$ *se numesc capetele (extremitatile) drumului. Notam cu* (I, r) *un drum parametrizat.*

Exemplu 3.3. *Fie* $\overrightarrow{r}(t) = R\sin t\,\overrightarrow{i} + R\cos t\,\overrightarrow{j}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. *Ecuatiile parametrice sunt*

$$\begin{cases} x(t) = R\sin t \\ y(t) = R\cos t, \end{cases}$$

$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. *Observam ca pentru orice* $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *verifica ecuatia* $x^2 + y^2 = R^2$. *Astfel suportul acestui drum este sfertul de cerc cu centrul in origine si de raza* R.

Exemplu 3.4. *Fie* $\overrightarrow{r}(t) = R\cos t\,\overrightarrow{i} + R\sin t\,\overrightarrow{j} + ht\,\overrightarrow{k}$, $t \in [0, 2\pi]$. *Ecuatiile parametrice sunt*

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = ht, \end{cases}$$

$t \in [0, 2\pi]$. *Suportul acestui drum este elicea circulara de pas* h. *Pentru* $t = 0$ *avem* $A(R, 0, 0)$, *pentru* $t = \frac{\pi}{2}$ *avem* $B(0, R, \frac{\pi h}{2})$, *pentru* $t = \pi$, $C(-R, 0, \pi h)$, *iar pentru* $t = 2\pi$, $D(R, 0, 2\pi h)$.

Definitie 3.5. (I, r) *se numeste simplu daca pentru orice* t_1, $t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2$ *avem* $r(t_1) = r(t_2)$.

(I, r) *se numeste neted(regulat) daca* x, y, $z \in C^1$ *si*

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0,$$

pentru orice $t \in I$.

(I, r) *se numeste inchis daca* $r(a) = r(b)$.

Exemplu 3.6.

$$\begin{cases} x = R\sin t \\ y = R\cos t, \end{cases}$$

$t \in [0, 2\pi]$.

Definitie 3.7. *Fie (I_1, r_1), (I_2, r_2). Spunem ca aceste drumuri sunt echivalente si notam $(I_1, r_1) \sim (I_2, r_2)$ daca exista $\lambda : I_1 \to I_2$ bijectiva, $\lambda \in C^1$ strict monotona cu $\lambda'(t) > 0$, pentru orice $t \in I$ sau $\lambda'(t) < 0$, pentru orice $t \in I$ astfel incat*

$$r_2(\lambda(t)) = r_1(t),$$

pentru orice $t \in I_1$.

Evident cele doua drumuri echivalente au acelasi suport.

Un drum parametrizat se considera orientat in sensul cresterii parametrului.

Exemplu 3.8. *Fie $\overrightarrow{r}_1(t) = R\sin t\,\overrightarrow{i} + R\cos t\,\overrightarrow{j}$, $t \in I_1 = [0, \frac{\pi}{2}]$, $\overrightarrow{r}_2(u) = R\cos u\,\overrightarrow{i} + R\sin u\,\overrightarrow{j}$, $u \in I_2 = [0, \frac{\pi}{2}]$ si $\overrightarrow{r}_3(z) = z\,\overrightarrow{i} + \sqrt{R^2 - z^2}\,\overrightarrow{j}$, $z \in [0, R]$.*

$(I_1, r_1) \sim (I_3, r_3)$ au aceeasi orientare, iar $(I_1, r_1) \sim (I_2, r_2)$ au orientari opuse.

Definitie 3.9. *Se numeste curba o clasa de drumuri parametrizate echivalente. Drumul (I, r) determina curba $\gamma = \{(I_1, r_1) : (I_1, r_1) \sim (I, r)\}$. Cum $(I, r) \sim (I, r)$ rezulta ca $(I, r) \in \gamma$. Notam cu $\gamma_+ = \{(I_1, r_1) : (I_1, r_1) \sim (I, r)$ au aceeasi orientare $\}$ si $\gamma_- = \{(I_1, r_1) : (I_1, r_1) \sim (I, r)$ au orientare opusa $\}$.*

Exemplu 3.10. *γ_1 curba determinata de (I_1, r_1), $(I_3, r_3) \in (\gamma_1)_+$ si $(I_2, r_2) \in (\gamma_1)_-$.*

O curba parametrizata este simpla (inchisa, neteda) daca drumul care o determina este simplu (inchis sau neted). O curba simpla este orientata pozitiv daca drumul care o defineste este orientat in sensul cresterii parametrului si negativ in caz contrar.

4. Lungimea unei curbe (Curbe rectificabile)

Fie $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I = [a, b]$ si fie $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = b$, $M_i[x(t_i), y(t_i), z(t_i)]$, $A = M_0[x(t_0), y(t_0), z(t_0)]$ si $B = M_n[x(b), y(b), z(b)]$.

Fie

$$\begin{aligned} L_\Delta(r) &= \sum_{i=1}^{n} \|M_{i-1}M_i\| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2+(z(t_i)-z(t_{i-1}))^2} \end{aligned}$$

lungimea liniei poligonale obtinuta prin unirea succesiva prin segmente de dreapta a punctelor M_i. Evident daca $\Delta' \prec \Delta''$ atunci $L_{\Delta'}(r) \leq L_{\Delta''}(r)$.

$\{L_\Delta\}_\Delta \subset \mathbb{R}_+$ poate fi marginita superior sau nu.

Definitie 4.1. *Spunem ca (I, r) este rectificabil daca $\{L_\Delta\}_\Delta$ este majorata. Pentru un astfel de drum rectificabil se numeste lungimea sa numarul $L(r) = \sup_\Delta\{L_\Delta\}_\Delta < \infty$.*

Observatia 4.2. *Pentru orice $n > 0$ exista Δ_n cu $\|\Delta_n\| < \frac{1}{n}$ astfel incat $\lim\limits_{n\to\infty} L_{\Delta_n} = L$. ($L(r) - \frac{1}{n} < L_{\Delta_n}(r) \leq L(r)$).*

Teorema 4.3. *Orice drum neted este rectificabil(are lungime) si*

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}dt.$$

Demonstraţie. Pentru $z(t) = 0$, $\overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}$, $t \in [a, b]$ si fie $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = b$. Atunci $L_\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i)-x(t_{i-1}))^2+(y(t_i)-y(t_{i-1}))^2}$. Aplicand teorema lui Lagrange exista ξ_i si η_i in intervalul deschis (t_{i-1}, t_i) astfel incat

$$\begin{aligned} L_\Delta &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(\xi_i)^2(t_i-t_{i-1})^2+y'(\eta_i)^2(t_i-t_{i-1})^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\eta_i)^2}(t_i-t_{i-1}). \end{aligned}$$

Deoarece functia $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(t) = \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$ este continua deci si integrabila avem

$$\sigma_\Delta(g; \xi) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\xi_i)^2}(t_i-t_{i-1})$$

si $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0} \sigma_\Delta(g; \xi) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$. Pe de alta parte,

$$|L_\Delta - \sigma_\Delta(g; \xi)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\eta_i)^2} - \sqrt{x'(\xi_i)^2+y'(\xi_i)^2}|(t_i-t_{i-1})$$

si tinand cont de inegalitatea

$$|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}| \leq |a-c|+|b-d|,$$

pentru orice a, b, c si d obtinem

$$|L_\Delta - \sigma_\Delta(g;\xi)| \leq \sum_{i=1}^{n} |y(\eta_i)-y(\xi_i)|(t_i-t_{i-1}).$$

Cum y' este continua pe $[a,b]$, y' este uniform continua si astfel $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel incat pentru orice $t', t'' \in [a,b]$ cu $|t'-t''| < \delta_\varepsilon$ sa avem

$$|y(t')-y(t'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Alegem acum diviziunea Δ astfel incat $|\eta_i - \xi_i| < t_i - t_{i-1} \leq \|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ si astfel

$$|y'(\eta_i)-y'(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

si

$$|L_\Delta - \sigma_\Delta(g;\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1}) = \varepsilon.$$

Astfel am aratat ca pentru orice diviziune Δ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ avem

$$|L_\Delta - \sigma_\Delta(g;\xi)| < \varepsilon.$$

Deoarece g este marginita pe $[a,b]$ atunci $\sigma_\Delta(g;\xi)$ este marginita pentru orice diviziune Δ si orice ξ si folosind inegalitatea anterioara obtinem ca $\{L_\Delta\}$ este marginita. Astfel am aratat ca r este rectificabil. Fie $L = \sup_\Delta L_\Delta$ atunci din definitia marginii superioare rezulta ca pentru orice $n \geq 1$ exista o diviziune Δ_n a intervalului $[a,b]$ astfel incat

$$L - \frac{1}{n} < L_{\Delta_n} \leq L.$$

Putem presupune ca $\|\Delta_n\| < \frac{1}{n}$(pentru ca in caz contrar rafinam diviziunea pana cand obtinem o diviziune $\Delta_n \prec \Delta'_n$ cu aceasta proprietate).

Fie Δ_n cu $\|\Delta_n\| < \frac{1}{n}$, $L_{\Delta_n} \to L$,

$$|L_{\Delta_n} - \sigma_{\Delta_n}(g;\xi)| < \varepsilon.$$

Luand $n \to \infty$ obtinem

$$\left| L - \int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt \right| < \varepsilon$$

si astfel

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt.$$

□

Exemplu 4.4. *Fie* $\begin{cases} x = R\sin t \\ y = R\cos t, \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$. *Atunci* $L = 2\pi R$.

Exemplu 4.5. *Fie* $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = ht, \end{cases}$ *cu* $t \in [0, 2\pi]$. *Atunci* $L = 2\pi\sqrt{R^2 + h^2}$.

5. Reprezentarea parametrica normala a unui drum

REZUMAT CURS 7

1. Lungimea unei curbe (Curbe rectificabile)

Fie $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I = [a, b]$ si fie $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = b$, $M_i[x(t_i), y(t_i), z(t_i)]$, $A = M_0[x(t_0), y(t_0), z(t_0)]$ si $B = M_n[x(b), y(b), z(b)]$.

Fie

$$
\begin{aligned}
L_\Delta(r) &= \sum_{i=1}^{n} \|M_{i-1}M_i\| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2}
\end{aligned}
$$

lungimea liniei poligonale obtinuta prin unirea succesiva prin segmente de dreapta a punctelor M_i. Evident daca $\Delta' \prec \Delta''$ atunci $L_{\Delta'}(r) \leq L_{\Delta''}(r)$.

$\{L_\Delta\}_\Delta \subset \mathbb{R}_+$ poate fi marginita superior sau nu.

Definitie 1.1. *Spunem ca (I, r) este rectificabil daca $\{L_\Delta\}_\Delta$ este majorata. Pentru un astfel de drum rectificabil se numeste lungimea sa numarul $L(r) = \sup_\Delta \{L_\Delta\}_\Delta < \infty$.*

Observatia 1.2. *Pentru orice $n > 0$ exista Δ_n cu $\|\Delta_n\| < \frac{1}{n}$ astfel incat $\lim\limits_{n\to\infty} L_{\Delta_n} = L$. ($L(r) - \frac{1}{n} < L_{\Delta_n}(r) \leq L(r)$).*

Teorema 1.3. *Orice drum neted este rectificabil(are lungime) si*

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt.$$

Exemplu 1.4. *Fie* $\begin{cases} x = R\sin t \\ y = R\cos t, \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$. *Atunci* $L = 2\pi R$.

Exemplu 1.5. *Fie* $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = ht, \end{cases}$ *cu* $t \in [0, 2\pi]$. *Atunci* $L = 2\pi\sqrt{R^2 + h^2}$.

2. Reprezentarea parametrica normala a unui drum

Fie (I, r) un drum neted. Conform teoremei anterioare acest drum este rectificabil si lungimea sa este

$$L = L(r) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

Notam cu $s = \lambda(t) = \int_a^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} du$.

Daca $M(x(t), y(t), z(t))$ atunci $s = \lambda(t)$ reprezinta lungimea arcului AM. Dar

$$\lambda'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} > 0,$$

pentru orice $t \in [a, b]$, $\lambda(a) = 0$ si $\lambda(b) = L$ si astfel $\lambda : [a, b] \to [0, L]$ este de clasa C^1, strict crescatoare si bijectiva, iar inversa ei $\lambda^{-1} : [0, L] \to [a, b]$ este de asemenea o functie de clasa C^1. Consideram in continuare functia vectoriala $\rho(s) = r[\lambda^{-1}(s)]$, pentru orice $x \in [0, L]$. Observam ca drumurile r si ρ sunt echivalente. Daca notam $\tilde{x}(s) = x[\lambda^{-1}(s)]$, $\tilde{y}(s) = y[\lambda^{-1}(s)]$ si $\tilde{z}(s) = z[\lambda^{-1}(s)]$ pentru fiecare $s \in [0, L]$ atunci $x = \tilde{x}(s)$, $y = \tilde{y}(s)$ si $z = \tilde{z}(s)$, $s \in [0, L]$ este o reprezentare parametrica a drumului r(deoarece $\rho \sim r$).

Definitie 2.1. *Reprezentarea parametrica $x = \tilde{x}(s)$, $y = \tilde{y}(s)$, $z = \tilde{z}(s)$, $s \in [0, L]$ se numeste reprezentarea parametrica normala a drumului r.*

In reprezentarea parametrica normala parametrul s reprezinta lungimea arcului AM, unde $A(\tilde{x}(0), \tilde{y}(0), \tilde{z}(0))$ si $M(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s))$.

Exemplu 2.2. *Fie drumul $r : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$ definit prin $r(t) = (R \sin t, R \cos t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Atunci avem $L = L(s) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 \cos^2 t + R \sin^2 t} dt = R\frac{\pi}{2}$ si $s = \lambda(t) = \int_0^t \sqrt{R^2 \cos^2 u + R^2 \sin^2 u} du = Rt$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Functia inversa este $t = \lambda^{-1}(s) = \frac{s}{R}$, $s \in [0, \frac{R\pi}{2}]$. Astfel reprezentarea sa normala este* $\begin{cases} \tilde{x}(s) = R \sin \frac{s}{R} \\ \tilde{y}(s) = R \cos \frac{s}{R}, \ s \in [0, \frac{R\pi}{2}]. \end{cases}$

Drumul $\rho = \rho(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$, $s \in [0, \frac{R\pi}{2}]$ este echivalent cu drumul r si are aceeasi orientare ca si r.

Exemplu 2.3. *Consideram un drum parametrizat $\overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$ atunci $\overrightarrow{r}'(t) = x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{j} + z'(t)\overrightarrow{k}$ si $\tau = \frac{\overrightarrow{r}'(t)}{\|\overrightarrow{r}'(t)\|}$ este versorul tangentei la curba, orientata in sensul cresterii parametrului s adica de la A catre B.*

Intr-adevar, $\overrightarrow{\rho}(s) = \overrightarrow{r}[\lambda^{-1}(s)]$ si

$$\overrightarrow{\rho}'(s) = \frac{dr[\lambda^{-1}(s)]}{d[\lambda^{-1}(s)]} \frac{d[\lambda^{-1}(s)]}{ds} = \frac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt} \frac{1}{\lambda'(t)} = \frac{\overrightarrow{r}'(t)}{\|\overrightarrow{r}'(t)\|} = \tau,$$

unde $t = \lambda^{-1}(s)$ *si* $\lambda'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$.

3. Integrale curbilinii de prima speta

Definitie 3.1. *Fie* $\gamma : \overrightarrow{r}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$, $t \in [a, b]$ *o curba neteda si simpla si fie* $\overrightarrow{\rho}(s) = \tilde{x}(s)\overrightarrow{i} + \tilde{y}(s)\overrightarrow{j} + \tilde{z}(s)\overrightarrow{k}$, $t \in [0, L]$ *reprezentarea normala a curbei* γ. *Fie deasemenea* $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *continua* ($\gamma \subset \Omega$)*(contine suportul curbei). Se numeste integrala curbilinie de prima speta a functiei* F *pe curba* γ *urmatoarea integrala definita* $\int_0^L [\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)]ds$ *daca aceasta exista si pentru integrala curbilinie de prima speta folosim notatia* $\int_\gamma F(x, y, z)ds$,

$$\int_\gamma F(x, y, z)ds \stackrel{def}{=} \int_0^L [\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)]ds.$$

Reamintim ca $s = \lambda(t) = \int_0^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2}du$ este elementul de arc.

Daca am cunoaste reprezentarea normala a oricarei curbe atunci integrala definita de mai sus ar fi suficienta pentru calculul integralei curbilinii de prima speta. De obicei, o curba este data printr-o reprezentare parametrica in care parametrul t este oarecare si reprezentarea sa normala nu se cunoaste. Urmatoarea teorema ne permite calculul integralei curbilinii de prima speta in cazul in care reprezentarea parametrica este oarecare.

Teorema 3.2. *Fie* γ *o curba neteda si fie* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a, b]$ *o reprezentare parametrica a sa. Daca* $A \subset \mathbb{R}^3$ *este o multime care contine suportul curbei* γ, $F : A \to \mathbb{R}$ *este continua atunci exista integrala curbilinie de prima speta a functiei* F *pe curba* γ

$$\int_\gamma F(x, y, z)ds = \int_a^b F[x(t), y(t), z(t)]\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt.$$

Observatia 3.3. *In cazul curbelor plane avem*

$$\int_\gamma F(x, y)ds = \int_a^b F[x(t), y(t)]\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

Exemplu 3.4. $\int_\gamma xyds$, *unde* $\gamma : x^2 + y^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Semnificatia fizica: Presupunem ca arcul $\overset{\frown}{AB}$ este un fir material de grosime neglijabila neomogen (densitatea lui in fiecare punct este data de F) atunci integrala curbilie de prima speta reprezinta masa unui fir material $\overset{\frown}{AB}$.

REZUMAT CURS 8

$\int_\gamma F(x,y,z)ds$ reprezinta masa unui fir material de grosime neglijabila care are forma curbei γ de suport $\widehat{AB}$ si de densitate $F = F(x,y,z)$, pentru orice $(x,y,z) \in \widehat{AB}$.

Proprietati

1) $\int_\gamma F(x,y,z)ds$ nu depinde de orientarea curbei γ.

2) $\int_\gamma ds$ reprezinta lungimea curbei γ.

3) $\int_\gamma (\alpha F + \beta G)ds = \alpha \int_\gamma F ds + \beta \int_\gamma G ds$.

4) Daca $F \leq G$ atunci $\int_\gamma F ds \leq \int_\gamma G ds$.

5) Daca $\gamma_1 : r = r_1(t)$, $t \in [a,b]$, $\gamma_2 : r = r_2(t)$, $t \in [b,c]$ si $r_1(b) = r_2(b)$ atunci $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ juxtapunerea curbelor γ_1 si γ_2,

$$\gamma : r = r(t) = \begin{cases} r_1(t),\ t \in [a,b] \\ r_2(t),\ t \in [b,c]. \end{cases}$$

Atunci

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} F(x,y,z)ds = \int_{\gamma_1} F(x,y,z)ds + \int_{\gamma_2} F(x,y,z)ds.$$

Definitie 0.1. *O curba γ se numeste neteda pe portiuni daca este juxtapunerea unui numar finit de curbe netede. Mai general, daca $\gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i$, γ_i netede atunci*

$$\int_\gamma F ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} F ds.$$

Exemplu 0.2. *Sa se calculeze $\int_\gamma xyds$, unde $\gamma : x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.*

1. Integrala curbilinie de speta a doua

Fie γ o curba neteda de suport $\widehat{AB}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ce contine suportul $\widehat{AB}$ al curbei γ $V : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o functie vectoriala continua, $V(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$,

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}.$$

Fie $x = \tilde{x}(s)$, $y = \tilde{y}(s)$, $z = \tilde{z}(s)$, $s \in [0,L]$ reprezentarea normala a curbei γ si notam cu $\overrightarrow{\tau}$ versorul tangentei la curba γ in punctul $M[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)] \in \widehat{AB}$. Stim ca

$$\overrightarrow{\tau} = \tilde{x}'(t)\overrightarrow{i} + \tilde{y}'(t)\overrightarrow{j} + \tilde{z}'(t)\overrightarrow{k} = \cos\alpha\,\overrightarrow{i} + \cos\beta\,\overrightarrow{j} + \cos\gamma\,\overrightarrow{k},$$

unde α, β, γ sunt unghiurile pe care le face τ cu OX, OY si OZ.

Definitie 1.1. *Se numeste integrala curbilinie de speta a doua a functiei $\overrightarrow{V}$ pe curba γ_+ urmatoarea integrala definita*

$$\int_0^L \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\tau} ds = \int_0^L (P[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)]\tilde{x}'(s) \\ +Q[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)]\tilde{y}'(s) + R[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)\tilde{z}'(s)])\, ds$$

si folosim notatia

$$\int_{\gamma_+} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \overset{def}{=} \int_0^L \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\tau} ds \\ = \int_0^L (P[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)]\tilde{x}'(s) \\ +Q[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)]\tilde{y}'(s) + R[\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s)]\tilde{z}'(s))\, ds.$$

Teorema urmatoare ne permite calculul integralei curbilinii de speta a doua atunci cand reprezentarea parametrica a curbei este una oarecare.

Teorema 1.2. *Fie γ o curba neteda si fie $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a,b]$ o reprezentare parametrica a sa. Notam cu γ_+ curba γ orientata in sensul cresterii parametrului t. Daca $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ce contine suportul curbei γ, $\widehat{AB}$ si fie $\overrightarrow{V} = (P, Q, R) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ este o functie vectoriala continua. Atunci exista integrala curbilinie de speta a doua pe γ_+ a functiei $\overrightarrow{V}$ si*

$$\int_{\gamma_+} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_a^b (P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) \\ +Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t))\, dt.$$

Exemplu 1.3. *Sa se calculeze $\oint_\gamma y^2dx - x^2dy$, unde $\gamma : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. (integrala pe o curba inchisa si se marcheaza printr-un cerc pe semnul integralei)*

$$\begin{cases} x - 1 = \cos t \\ y - 1 = \sin t,\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

si obtinem ca $I = 0$.

Interpretarea fizica: $\int_{\gamma_+} Pdx+Qdy+Rdz$ reprezinta lucrul mecanic efectuat pentru deplasarea unui punct material pe curba γ_+ sub actiunea fortei variabile $\overrightarrow{V} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$.

Proprietati

1) Integrala curbilinie de speta a doua depinde de orientarea curbei.

$$\int_{\gamma_-} Pdx + Qdy + Rdz = -\int_{\gamma_+} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Intr-adevar, versorul tangenta la curba γ_- intr-un punct $M \in \widehat{AB}$ este egal cu $-\overrightarrow{\tau}$ si astfel

$$\int_{\gamma_-} Pdx+Qdy+Rdz = \int_0^L \overrightarrow{V}\cdot(-\overrightarrow{\tau})ds == -\int_0^L \overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{\tau}ds = -\int_{\gamma_+} Pdx+Qdy+Rdz.$$

2) Daca γ este neteda pe portiuni (este juxtapunere de curbe netede), $\gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{p} \gamma_i$ atunci

$$\int_{\gamma_+} Pdx + Qdy + Rdz = \sum_{i=1}^{p} \int_{(\gamma_i)_+} Pdx + Qdy + Rdz.$$

2. Independenta de drum a integralei curbilinii de speta a doua

Ne punem problema cand integrala curbilinie de speta a doua depinde numai de extremitatile curbei si nu de curba insasi.

2.1. **Elemente de teoria campurilor.** Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ domeniu (multime deschisa si conexa).

Definitie 2.1. *Se numeste camp scalar orice functie $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$. Daca $\phi \in C^k(\Omega)$ spunem ca ϕ este camp scalar de clasa C^k.*

Definitie 2.2. *Se numeste camp vectorial orice functie vectoriala $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$,*

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}.$$

Definitie 2.3. *Fie $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ un camp scalar de clasa C^1. Se numeste gradientul lui ϕ si se noteaza cu $grad\,\phi$*

$$grad\,\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\overrightarrow{k} = \nabla\phi,$$

unde

$$\nabla(\text{ nabla }) = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k}$$

Definitie 2.4. *Fie $\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$ un camp vectorial de clasa C^1. Se numeste divergenta lui $\overrightarrow{F}$ si se*

noteaza cu $div\ \overrightarrow{F}$,

$$div\ \overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$
$$= \nabla \cdot \overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

unde produsul scalar de mai sus este unul formal.

Definitie 2.5. *Fie* $\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$ *un camp vectorial de clasa* C^1. *Se numeste rotorul lui* $\overrightarrow{F}$ *si se noteaza cu* $rot\ \overrightarrow{F}$,

$$rot\ \overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k}.$$

Mai putem scrie ca

$$rot\ \overrightarrow{F} = \nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Definitie 2.6. *Fie* $\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$. *Spunem ca* $\overrightarrow{F}$ *este un camp potential daca exista* $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ *de clasa* C^1 *astfel incat*

$$\overrightarrow{F} = grad\ \phi,$$

adica

$$P = \frac{\partial \phi}{\partial x},\ Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}\ si\ R = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Definitie 2.7. *Un camp* $\overrightarrow{F}$ *se numeste solinoidal (tubular) daca* $div\ \overrightarrow{F} = 0$.

Definitie 2.8. *Un camp* $\overrightarrow{F}$ *se numeste irotational daca* $rot\ \overrightarrow{F} = 0$.

Definitie 2.9. *Fie* $P,\ Q,\ R : \Omega \to \mathbb{R}$. *Se numeste forma diferentiala de gradul intai pe* Ω, *de coeficienti* $P,\ Q,\ R$ *urmatoarea expresie*

$$\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,$$

pentru orice $(x,y,z) \in \Omega$. *Daca in plus* $P,\ Q,\ R$ *sunt de clasa* $C^p(\Omega)$ *atunci* ω *se numeste forma diferentiala de ordinul intai de clasa* C^p.

Definitie 2.10. *O forma diferentiala de ordinul intai*

$$\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz,$$

pentru orice $(x, y, z) \in \Omega$ *se numeste exacta daca exista o functie* $u \in C^1(\Omega)$ *astfel incat* $\omega = du$ *pe* Ω*, adica*

$$P = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q = \frac{\partial u}{\partial y} \text{ si } R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Observatia 2.11. *Daca* $\overrightarrow{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\overrightarrow{i} + Q(x, y, z)\overrightarrow{j} + R(x, y, z)\overrightarrow{k}$, $(x, y, z) \in \Omega$ *atunci* ω *de coeficienti* P, Q, R *este exacta pe* Ω *daca* $\overrightarrow{F}$ *este un camp de potential.*

Definitie 2.12. *Spunem ca* $\int P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ *nu depinde de drum pe* Ω *daca oricare ar fi* γ_1, $\gamma_2 \subset \Omega$ *curbe netede pe portiuni avand aceleasi capete* A, B *avem*

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{\gamma_2} & P(x, y, z)dx \\ & + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.\end{aligned}$$

Teorema 2.13. *Fie* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *un domeniu si* P, Q, R *functii reale continue pe* Ω*. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:*

(i) Forma diferentiala $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ *este exacta pe* Ω*;*

(ii) $\int \omega$ *nu depinde de drum;*

(iii) $\oint_\gamma \omega = 0$*, pentru orice curba inchisa* γ*, neteda pe portiuni al carei suport este inclus in* Ω*.*

REZUMAT CURS 9

1. Independenta de drum a integralei curbilinii de speta a doua (continuare)

Definitie 1.1. *Fie $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ o forma diferentiala de ordinul intai de clasa C^1. ω se numeste inchisa daca*

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \end{cases}$$

Observatia 1.2. *Daca consideram campul vectorial $\overrightarrow{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$,*

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\overrightarrow{i} + Q(x, y, z)\overrightarrow{j} + R(x, y, z)\overrightarrow{k},$$

$(x, y, z) \in \Omega$ atunci ω este inchisa daca si numai daca campul $\overrightarrow{F}$ este irotational adica daca

$$rot\ \overrightarrow{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overrightarrow{k} = 0.$$

Teorema 1.3. *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ o multime deschisa, marginita si convexa. Atunci ω este exacta daca si numai daca ω este inchisa.*

Exemplu 1.4. *Sa se calculeze integrala*

$$\oint_\gamma (2y^2 - 4y + x)dx + 4x(y - 1)dy,$$

unde $\gamma : x^2 + y^2 - 2y = 0$. Deoarece $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ rezulta ca ω este inchisa si deci integrala este 0. Sa se verifice si direct folosind parametrizarea $x = \cos t$, $y = 1 + \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

Exemplu 1.5. *Sa se calculeze*

$$\int_{(1,2,3)}^{(2,4,5)} yzdx + zxdy + xydz.$$

Cum $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = x$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = z$ astfel ca ω este inchisa si deci exacta prin urmare

$$\int_{(1,2,3)}^{(2,4,5)} \omega = u(2, 4, 5) - u(1, 2, 3) = 40 - 6 = 34,$$

$$u(x, y, z) = \int_1^2 P(t, 2, 3)dt + \int_2^4 Q(2, t, 3)dt + \int_3^5 R(2, 4, t)dt = 34.$$

2. Aria unei multimi plane

Fie $D = [a, b] \times [c, d]$ atunci aria$(D) = (b - a)(d - c)$.

Definitie 2.1. *$E \subset \mathbb{R}^2$ se numeste elementara daca $E = \bigcup_{i=1}^{p} D_i$, $D_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ si $\overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \emptyset$ daca $i \neq j$. Cu alte cuvinte prin multime elementara in plan intelegem o reuniune finita de dreptunghiuri cu laturile paralele cu axele de coordonate fara puncte interioare. Prin definitie*

$$aria(E) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{p} aria(D_i).$$

Fie $\mathcal{E}$ familia tuturor multimilor elementare din plan si fie $A \subset \mathbb{R}^2$ o multime marginita ($\exists M > 0$ astfel incat $\sqrt{\|(x, y)\|} = x^2 + y^2 < M$, pentru orice $(x, y) \in A$). Notam in continuare cu

$$S^*(A) = \inf\{\text{aria}F; F \supset A, F \in \mathcal{E}\}$$

si

$$S_*(A) = \sup\{\text{aria}E; E \subset A, E \in \mathcal{E}\}.$$

Daca A nu contine nicio multime elementara atunci definim $S_*(A) = 0$. Astfel exista $S_*(A) \leq S^*(A)$.

Definitie 2.2. *Spunem ca $A \subset \mathbb{R}^2$ marginita are arie daca $S_*(A) = S^*(A) = S(A) = aria(A)$.*

Observatia 2.3. *Orice multime elementara are arie si aceasta coincide cu suma ariilor dreptunghiurilor care o compun.*

Exemplu 2.4. *Exista multimi plane care nu au arie. Fie*

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{daca } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{daca } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases}$$

functia lui Dirichlet si fie

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq D(x)\}.$$

Atunci $S_*(\Gamma) = 0$ si $S^*(\Gamma) = 1$ si astfel Γ nu are arie.

Urmatoarul rezultat ne furnizeaza exemple de multimi care au arie.

Propozitia 2.5. *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ integrabila si fie $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ (subgraficul sau) atunci Γ_f are arie si*

$$aria(\Gamma_f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Exemplu 2.6. *Calculati aria elipsei* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. *Din motive de simetrie este suficient sa calculam aria sfertului de elipsa din primul cadran. In acest caz,* $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ *si*

$$\frac{aria}{4} = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{\pi ab}{4}.$$

Exemplu 2.7. *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *cu* $f(x) \leq g(x)$, *pentru orice* $x \in [a, b]$ *si fie*

$$\Gamma_{fg} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

atunci $aria(\Gamma_{fg}) = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$.

Exemplu 2.8. *Fie* $\rho : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}_+$ *continua si fie* $\Gamma = \{(\theta, \rho); \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \rho(\theta)\}$. *Atunci* $aria(\Gamma) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\theta)d\theta$.

Teorema 2.9. *Fie* $A \subset \mathbb{R}^2$ *marginita si fie* $C = fr(A) \overset{def}{=} \overline{A} \cap \overline{CA}$ *frontiera lui* A. *Daca* C *este neteda pe portiuni atunci* A *are arie.*

Definitie 2.10. *Fie* $A \subset \mathbb{R}^2$ *marginita. Se numeste diametrul lui* A,

$$diam(A) = \sup\{dist(M, N); M \in A, N \in A\}.$$

Definitie 2.11. $D \subset \mathbb{R}^2$ *se numeste domeniu compact daca* D *este multime inchisa marginita si conexa.*

Definitie 2.12. *Fie* D *un domeniu compact care are arie. Se numeste partitie a lui* D *orice familie finita de subdomenii* $D_i \subset D$, $i = \overline{1, p}$ *care au arie, nu au puncte interioare comune* ($\overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \emptyset$, $i \neq j$) *si* $D = \bigcup\limits_{i=1}^{p} D_i$ ($aria(D) = \sum\limits_{i=1}^{p} aria(D_i)$).

Notam cu ρ partitia $D_1, D_2, \ldots, D_p$ a lui D. Definim norma partitiei

$$\|\rho\| = \max\{\text{diam}(D_i); 1 \leq i \leq p\}.$$

Definitie 2.13. *O partitie* $\rho' : (D'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n_i}}$ *spunem ca este mai fina ca partitia* $\rho : (D_i)_{1 \leq i \leq p}$ *si notam* $\rho \prec \rho'$ *daca* $D_i = \bigcup\limits_{j=1}^{n_i} D'_{ij}$, *pentru orice* $i = \overline{1, p}$. *Cu alte cuvinte daca fiecare subdomeniu al partitiei* ρ *este o reuniune finita de subdomenii ale partitiei* ρ'.

Observatia 2.14. *Daca* $\rho \prec \rho'$ *atunci* $\|\rho\| \geq \|\rho'\|$.

Fie $\rho : D_1, D_2, \ldots, D_p$ o partitie a domeniului D si fie $f : D \to \mathbb{R}$ o functie marginita. Notam cu

$$m = \inf\{f(x, y); (x, y) \in D\},$$
$$M = \sup\{f(x, y); (x, y) \in D\},$$

$$m_i = \inf\{f(x,y); (x,y) \in D_i\}$$

si cu

$$M_i = \sup\{f(x,y); (x,y) \in D_i\}.$$

Este evident ca

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M, \tag{1}$$

pentru orice i. Sumele Darboux corespunzatoare functiei f si partitiei ρ sunt definite astfel

$$s_\rho = \sum_{i=1}^{p} m_i \cdot \text{aria}(D_i)$$

si

$$S_\rho = \sum_{i=1}^{p} M_i \cdot \text{aria}(D_i).$$

Folosind relatia (1) obtinem

$$m \cdot \text{aria}(D) \leq s_\rho \leq S_\rho \leq M \cdot \text{aria}(D). \tag{2}$$

Lema 2.15. *Daca $\rho \prec \rho'$ atunci $s_\rho \leq s_{\rho'} \leq S_{\rho'} \leq S_\rho$.*

Lema 2.16. *Pentru orice doua partitii ale domeniului D, ρ' si ρ'' avem $s_{\rho'} \leq S_{\rho''}$.*

Notam in continuare cu

$$I_* \stackrel{\text{def}}{=} \sup_\rho s_\rho \leq M \cdot \text{aria}(D)$$

si cu

$$I^* \stackrel{\text{def}}{=} \inf_\rho S_\rho \geq m \cdot \text{aria}(D).$$

Prin urmare au loc inegalitatile

$$m \cdot \text{aria}(D) \leq I_* \leq I^* \leq M \cdot \text{aria}(D). \tag{3}$$

Definitie 2.17. *Spunem ca f este integrabila pe D daca $I_* = I^* = I$, si notam cu $I = \iint_D f(x,y)dxdy$ si se numeste integrala dubla a functiei f pe domeniul D.*

Exemplu 2.18. *Fie $f(x,y) = c$, pentru orice $(x,y) \in D$. Atunci $m = m_i = M_i = M = c$, pentru orice i si*

$$s_\rho = \sum_{i=1}^{p} c \cdot aria(D_i) = caria(D) = S_\rho.$$

Astfel $I^* = I_* = c \cdot aria(D)$ si $\iint_D cdxdy = c \cdot aria(D)$. Prin urmare $\iint_D 1dxdy = aria(D)$.

CURS 10

1. Integrala dubla (continuare)

Teorema 1.1. *(Criteriul de integrabilitate al lui Darboux) Fie D un domeniu compact care are arie si fie $f : D \to \mathbb{R}$ o functie marginita. Conditia necesara si suficienta ca f sa fie integrabila pe D este ca $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea ca pentru orice partitie ρ, partitie a lui D, cu $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$ sa avem $S_\rho - s_\rho < \varepsilon$.*

Teorema 1.2. *Orice $f : D \to \mathbb{R}$ continua este integrabila pe D.*

2. Sume Riemann

Fie $\rho : D_1, D_2, \ldots, D_p$ o partitie a lui D si fie $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ oarecare, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_p)$.

Definitie 2.1. *Suma Riemann atasata functiei f, partitiei ρ si punctelor intermediare (ξ_i, η_i) se defineste astfel*

$$\sigma_\rho(f, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i, \eta_i) aria(D_i).$$

Deoarece $m_i \leq f(\xi_i, \eta_i) \leq M_i$, pentru orice $i = \overline{1, p}$ rezulta ca

$$s_\rho \leq \sigma_\rho(f, \xi, \eta) \leq S_\rho,$$

pentru orice (ξ, η).

Definitie 2.2. *Fie D un domeniu compact si fie $f : D \to \mathbb{R}$ o functie marginita. Spunem ca f este integrabila pe D daca exista $I \in \mathbb{R}$(finit) cu proprietatea ca $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea ca pentru orice partitie ρ, partitie a lui D, cu $\|\rho\| < \delta_\varepsilon$ si orice (ξ, η) sa avem $|\sigma_\rho(f, \xi, \eta) - I| < \varepsilon$. Numarul I se numeste integrala dubla a functiei f pe domeniul D si se noateaza $I = \iint_D f(x, y) dxdy$.*

Teorema 2.3. *(Riemann) Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o functie marginita. Conditia necesara si suficienta ca f sa fie integrabila pe D este sa existe $I \in \mathbb{R}$(finit) astfel incat $\forall \rho_n$, $\|\rho_n\| \to 0$ si orice $(\xi^{(n)}, \eta^{(n)})$ sa avem $\sigma_{\rho_n}(f, \xi^{(n)}, \eta^{(n)}) \to I$ cand $n \to \infty$.*

Observatia 2.4. *Daca f este integrabila pe D atunci pentru orice sir de partitii $\{\rho_n\}$ ale lui D cu $\|\rho_n\| \to 0$ avem*

$$\lim_{n\to\infty} s_{\rho_n} = \lim_{n\to\infty} S_{\rho_n} = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\rho_n}(f, \xi^{(n)}, \eta^{(n)}) = \iint_D f(x, y) dxdy.$$

Proprietati

1) $\iint_D 1dxdy = \text{aria}(D)$;

2) $\iint_D(\alpha f + \beta g)dxdy = \alpha \iint_D f(x,y)dxdy + \beta \iint_D g(x,y)dxdy$;

3) Daca f si g sunt integrabile pe D si $f(x,y) \leq g(x,y)$, pentru orice $(x,y) \in D$ atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D g(x,y)dxdy.$$

4) Daca f este integrabila pe D atunci $|f|$ este integrabila pe D si

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|dxdy.$$

5) Daca f este integrabila pe D si notam cu m respectiv M marginea inferioara si respectiv marginea superioara a functiei f pe D atunci exista μ, $m \leq \mu \leq M$ astfel incat

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \mu \cdot \text{aria}(D).$$

In plus daca f este continua pe D atunci exista un punct $(\xi, \eta) \in D$ astfel incat

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)\text{aria}(D).$$

6) Daca $D = D_1 \cup D_2$ este reuniunea a doua domenii compacte D_1, D_2 care au arie, fara puncte interioare comune si f integrabila pe D_1, D_2 atunci f este integrabila pe D si

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

3. Modul de calcul al integralei duble

Definitie 3.1. *$D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact se numeste simplu in raport cu OY daca exista doua functii continue $\phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ astfel incat $\phi(x) < \psi(x)$ daca $x \in (a,b)$ astfel incat*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}.$$

Analog, D se numeste simplu in raport cu OX daca exista doua functii continue $u, v : [c,d] \to \mathbb{R}$ astfel incat $u(y) < v(y)$ pentru $c < y < d$ astfel incat

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; c \leq y \leq d, u(y) \leq x \leq v(y)\}.$$

Lema 3.2. *Daca D este simplu in raport cu OY si f este continua atunci*

$$m \cdot aria(D) \leq \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right) dx \leq M \cdot aria(D).$$

Teorema 3.3. *Fie D simplu in raport cu axa OY (respectiv OX) si $f : D \to \mathbb{R}$ continua. Atunci*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

respectiv

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Exemplu 3.4. *Sa se calculeze $\iint_D x^2 y dxdy$, unde D este domeniul marginit de curbele $y = x^2$, $y = 1$.*

4. Schimbarea de variabile in integrala dubla

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domeniu marginit care are arie, fie functia vectoriala $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, definita prin $F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, pentru orice $(u,v) \in \overline{\Omega}$ si fie $D \subset \mathbb{R}^2$, $D = F(\Omega)$. Presupunem ca F are urmatoarele proprietati:

(i) $F \in C^1(\overline{\Omega})$;
(ii) $F : \Omega \to D$ este bijectiva;
(iii) $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v) \neq 0$, pentru orice $(u,v) \in \Omega$.

In aceste conditii rezulta ca $\overline{D} = F(\overline{\Omega})$ este un domeniu compact iar jacobianul transformarii F pastreaza semn constant pe Ω. F se numeste schimbare de variabile sau schimbare de coordonate. Cu notatiile de mai sus daca $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ este o functie continua atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Omega f[x(u,v), y(u,v)] \cdot \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)}(u,v) \right| dudv.$$

4.1. **Coordonate polare.** Cea mai utilizata schimbare de variabile este trecerea la coordonate polare:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta, \ \rho \in (0,\infty), \theta \in (0, 2\pi). \end{cases}$$

Atunci $F(\rho,\theta) = (\rho \cdot \cos\theta, \rho \cdot \sin\theta)$, iar $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho$.

Exemplu 4.1. *Calculati $\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$, unde $D : \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ y = x\sqrt{3} \\ y = \frac{x}{\sqrt{3}} \\ x \geq 0. \end{cases}$*

CURS 11

0.1. **Coordonate polare generalizate.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta,\ \theta\in[0,2\pi] \text{ si } \rho\in[0,1]. \end{cases}$$

$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = ab\rho.$

Exemplu 0.1. *Sa se calculeze* $\iint_D (x+y)dxdy$, *unde* $D : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\le 0 \\ x\ge 0, y\ge 0. \end{cases}$

1. Aplicatii ale integralei duble in geometrie si mecanica

(1) $\iint_D 1dxdy = \text{aria}(D)$, unde D este un domeniu marginit care are arie.

(2) $\iint_D f(x,y)dxdy$ reprezinta masa placii plane neomogene de forma domeniului D a carei densitate este data de f, $f : D \to \mathbb{R}_+$.

(3) Daca D este o placa omogena plana si G este centrul sau de greutate atunci

$$x_G = \frac{\iint_D xdxdy}{\iint_D dxdy}$$

si

$$y_G = \frac{\iint_D ydxdy}{\iint_D dxdy}.$$

Exemplu 1.1. *Sa se afle coordonatele centrului de greutate al unei placi plane omogene care are forma domeniului* $D : \begin{cases} y = x^2 \\ y = 1. \end{cases}$

(4) Momentul de inertie al unei placi plane: daca D este o placa plana omogena de densitate $\rho = 1$ atunci momentul de inertie al placii D in raport cu $O(0,0)$ este

$$I_O = \iint_D (x^2+y^2)dxdy,$$

momentul de inertie in raport cu axa OX este

$$I_{OX} = \iint_D y^2dxdy,$$

iar momentul de inertie in raport cu axa OY este

$$I_{OY} = \iint_D x^2 dxdy.$$

2. Formula lui Green

Formula lui Green face legatura intre integrala dubla si integrala curbilinie de speta a doua.

Teorema 2.1. *(Formula lui Green) Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ domeniu compact si $C = Fr(D)$ o curba neteda pe portiuni, P, $Q : D \to \mathbb{R}$ de clasa C^1. Atunci*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \overleftarrow{\oint}_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

(Orientarea curbei C este aleasa astfel incat domeniul D sa ramana la stanga).

Exemplu 2.2. *$aria(D) = \iint_D 1dxdy \overset{Green}{=} \overleftarrow{\oint}_{Fr(D)} \frac{x}{2}dy - \frac{y}{2}dx$. Calculati aria elipsei: $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0$, $aria(D)$.*

Exemplu 2.3. *Sa se calculeze direct si apoi folosind formula lui Green*

$$\oint_{Fr(D)} (xy - y)dx + (xy + x)dy,$$

unde $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0$.

3. Integrale duble improprii

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domeniu nemarginit si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ integrabile pe orice domeniu compact care are arie $D \subset \Omega$.

Definitie 3.1. *Spunem ca $\iint_D f(x,y)dxdy$ este convergenta daca pentru orice sir $\{D_n\}$ de domenii compacte care au arie si au proprietatile*

1) $D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_n \subset \ldots$;
2) $\overline{D_n} \subset \overline{D_{n+1}}$, pentru orice n;
3) $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$

exista si este finita $\lim\limits_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)dxdy$. Limita nu depinde de alegerea sirului $\{D_n\}$, pentru orice $\{D'_n\}$ cu proprietatile de mai sus avem

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D'_n} f(x,y)dxdy.$$

Se poate demonstra urmatorul rezultat.

Teorema 3.2. *Daca $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ este integrabila pe orice domeniu compact care are arie, inclus in Ω atunci daca exista un sir $\{D_n\}$ de domenii compacte care au arie cu proprietatile de mai sus astfel incat exista $\lim\limits_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)dxdy$ si este finita atunci $\iint_\Omega f(x,y)dxdy$ este convergenta si*

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)dxdy = \iint_\Omega f(x,y)dxdy.$$

Exemplu 3.3. $\iint_{\mathbb{R}}^2 e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \pi$. *Alegem* $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < n^2\}$, $\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \pi(1 - e^{-n^2})$.

$D'_n = \{(x,y); -n < x < n, -n < y < n\} = (-n,n) \times (-n,n)$, D'_n *este domeniu compact care are arie,* $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n=1}^\infty D'_n$ *si din teorema anterioara rezulta ca*

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D'_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \pi$$

dar

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \iint_{D'_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy &= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}dy\right) dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_{-n}^{n} e^{-x^2}dx\right) \left(\int_{-n}^{n} e^{-y^2}dy\right) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi\end{aligned}$$

si astfel am obtinut valoarea integralei Poisson.

4. Integrale triple

Fie $T = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]$ un paralelipiped dreptunghic cu muchiile paralele cu axele de coordonate. Volumul este

$$\mathrm{Vol}(T) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3).$$

Definitie 4.1. $E \subset \mathbb{R}^3$ *se numeste multime elementara daca exista* $T_1, T_2, \ldots, T_p$ *paralelipipede dreptunghice cu muchiile paralele cu axele de coordonate astfel incat* $\overset{\circ}{T_i} \cap \overset{\circ}{T_j} = \emptyset$ *daca* $i \neq j$ *si* $E = \bigcup\limits_{i=1}^{p} T_i$ *cu* $Vol(E) = \sum\limits_{i=1}^{p} Vol(T_i)$.

Notam cu $\mathcal{E}$ familia tuturor multimilor elementare din $\mathbb{R}^3$. Fie $A \subset \mathbb{R}^3$ o multime marginita si notam cu

$$V^*(A) = \inf\{\mathrm{Vol}(F); F \supset A, F \in \mathcal{E}\}$$

si

$$V_*(A) = \sup\{\mathrm{Vol}(E); E \subset A, E \in \mathcal{E}\}.$$

Daca A nu contine nicio multime elementara atunci $V_*(A) = 0$. Este evident ca $V_*(A) \leq V^*(A)$.

Definitie 4.2. *$A \subset \mathbb{R}^3$ spunem ca este un domeniu care are volum daca $V_*(A) = V^*(A) = Vol(A) = V$.*

Observatia 4.3. *Orice multime elementara in spatiu are volum in sensul prezentat anterior.*

Teorema 4.4. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu marginit care are arie si fie $f : \overline{D} \to \mathbb{R}_+$ o functie continua. Daca notam cu $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in \overline{D}\}$ atunci T are volum si $Vol(T) = \iint_D f(x, y)dxdy$.*

Din punct de vedere geometric T reprezinta un corp cilindric marginit inferior de D, lateral de suprafata cilindrica cu generatoarele paralele cu OZ si curba directoare $\mathrm{fr}(D)$, iar superior de graficul functiei $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{D}$.

Definitie 4.5. *Fie $T \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact care are arie. ρ : $T_1, T_2, \ldots, T_p$ se numeste partitie a lui T daca*

1) $T = \bigcup\limits_{i=1}^{p} T_i$;

2) $\overset{\circ}{T_i} \cap \overset{\circ}{T_j} = \emptyset$ daca $i \neq j$;

3) T_i domeniu compact care are volum pentru fiecare i.

Norma partitiei este $\|\rho\| = \max\{\mathrm{diam}(T_i), i = \overline{1, p}\}$, unde $\mathrm{diam}(T_i) = \sup\{\mathrm{dist}(M', M''); M', M'' \in T_i\}$.

Fie $f : T \to \mathbb{R}$ o functie marginita si notam cu

$$m_i = \inf\{f(x, y, z); (x, y, z) \in T_i\}$$

si

$$M_i = \sup\{f(x, y, z); (x, y, z) \in T_i\}.$$

De asemenea $s_\rho = \sum\limits_{i=1}^{p} m_i \cdot \mathrm{Vol}(T_i)$ si $S_\rho = \sum\limits_{i=1}^{p} M_i \cdot \mathrm{Vol}(T_i)$. Evident $s_\rho \leq S_\rho$. Atunci ca si la integrala dubla avem $I_* = \sup_\rho s_\rho$ iar $I^* = \inf_\rho S_\rho$. Daca $I_* = I^* = I = \iint_T f(x, y, z)dxdydz$.

5. Modul de calcul al integralei triple

Definitie 5.1. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact care are arie. T se numeste simplu in raport cu axa OZ daca exista ϕ, $\psi : D \to \mathbb{R}$ continue cu $\phi(x, y) < \psi(x, y)$ pentru orice $(x, y) \in \overset{\circ}{D}$ astfel incat*

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \phi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y), \text{ pentru orice } (x, y) \in D\}.$$

Teorema 5.2. *Fie $T \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu simplu in raport cu OZ si $f : T \to \mathbb{R}$ continua. Atunci*

$$\iint_T f(x,y,z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$

Exemplu 5.3. *Calculati $\iint_T z dxdydz$, unde $T : \begin{cases} x^2+y^2 = 2z \\ z = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ (paraboloid eliptic).*

CURS 12

1. Aplicatii ale integralei triple in geometrie si mecanica

1) $\iint_T 1 dxdydz = \text{Vol}(T)$;
2) $f : T \to \mathbb{R}_+$,

$$\iint_T f(x,y,z)dxdydz = \text{masa}(T),$$

unde T este un corp neomogen de densitate $f(x,y,z)$;
3) Daca T este omogen atunci

$$x_G = \frac{\iint_T xdxdydz}{\iint_T dxdydz}$$

$$y_G = \frac{\iint_T ydxdydz}{\iint_T dxdydz}$$

si

$$z_G = \frac{\iint_T zdxdydz}{\iint_T dxdydz}.$$

Exemplu 1.1. *Sa se calculeze coordonatele centrului de greutate ale corpului* $T : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2z \\ z \geq 0, z \leq 2. \end{cases}$

4) Daca T este un corp omogen de densitate $f(x,y,z) = 1$ pentru orice (x,y,z) atunci

$$I_O = \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$$

$$I_{OZ} = \iint_T (x^2 + y^2)dxdydz$$

$$I_{XOY} = \iint_T z^2 dxdydz.$$

2. Schimbarea de variabila la integrala tripla

$F : \Omega \to T$, $F(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$, $T = F(\Omega)$, $f : T \to \mathbb{R}$ continua atunci

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Omega f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)] \left| \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \right| dudvdw.$$

2.1. **Coordonate polare in spatiu.** $\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\phi \\ y = \rho \sin\theta \sin\phi \\ z = \rho \cos\theta, \end{cases}$ unde $\rho \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, \pi)$ si $\phi \in (0, 2\pi)$.

Se observa ca $OP = OM \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \rho \sin\theta$ si $x = OP \cdot \cos\phi$, $y = OP \cdot \sin\phi$ si ca $z = \rho\cos\theta$. $\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\phi)} = \rho^2 \sin\theta$.

Exemplu 2.1. *Calculati* $\iiint_T z dxdydz$, *unde* $T : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ *si* $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

2.2. **Coordonate cilindrice.**

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = t,\ \rho \geq 0, t \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,t)} = \rho$. Se folosesc la cilindru, con, paraboloid eliptic.

Exemplu 2.2. $\iiint_T xyz dxdydz$, *unde* $T : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2 \\ 0 \leq z \leq h. \end{cases}$

Exemplu 2.3. $\iiint_T (x^2 + y^2) dxdydz$, *unde* $T : x^2 + y^2 \leq \frac{r^2 z^2}{h^2}$, $0 \leq z \leq h$ *(con).*

Exemplu 2.4. $\iiint_T dxdydz$, *unde* T *este marginit de* $x^2 + y^2 = 2z$ *si* $z = 2$.

3. Integrale de suprafata

3.1. **Suprafete.** Notiunea de suprafata este generalizarea naturala a notiunii de curba.

Definitie 3.1. *Se numeste panza parametrizata orice functie vectoriala* $r : D \to \mathbb{R}^3$ *de clasa* C^1, *unde* $D \subset \mathbb{R}^2$ *este un domeniu.*

Daca x, y, z sunt componentele scalare ale lui r atunci

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

pentru fiecare $(u, v) \in D$ si $\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$. Ecuatiile parametrice ale panzei r sunt $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v),\ (u, v) \in D, \end{cases}$ iar u si v sunt parametrii panzei. $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(u, v)$ si

$$S = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)); (u, v) \in D\}$$

este suportul panzei $(D, \vec{r})$.

Exemplu 3.2. *Fie panza parametrizata*

$$\begin{cases} x = R\sin u \cos v \\ y = R\sin u \sin v \\ z = R\cos u,\ u \in (0,\pi), v \in (0, 2\pi), D = (0,\pi) \times (0, 2\pi). \end{cases}$$

Cum pentru orice $(u, v) \in D$ verifica ecuatia $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ rezulta ca suportul acestei panze este sfera cu centrul in origine si de raza R.

Definitie 3.3. *O panza parametrizata $r : D \to \mathbb{R}^3$ spunem ca este simpla daca r este injectiva.*

Definitie 3.4. *Spunem ca $r : D \to \mathbb{R}^3$ este de clasa C^1 daca x, y si $z \in C^1(D)$.*

Definitie 3.5. *O panza parametrizata (D, r) de clasa C^1 spunem ca este neteda daca $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, pentru fiecare $(u, v) \in D$ (sau $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$, pentru fiecare $(u, v) \in D$), unde $A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}$, $B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}$ si $C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$. Pentru $\vec{r}_u = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} + z_u\vec{k}$ si $\vec{r}_v = x_v\vec{i} + y_v\vec{j} + z_v\vec{k}$ avem*

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}.$$

Astfel daca (D, r) este o panza parametrizata neteda $\vec{r}_u$ si $\vec{r}_v$ sunt necoliniari si determina un plan. Planul determinat de $\vec{r}_u$ si $\vec{r}_v$ si care trece prin $M[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \in S$ se numeste planul tangent in M la S. Cum $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ este perpendicular pe $\vec{r}_u$ si pe $\vec{r}_v$ inseamna ca $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ este perpendicular pe planul tangent in M la S. Prin urmare $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ are aceeasi directie cu normala la suprafata si $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$ este versorul normalei la suprafata in M.

A, B, C sunt parametrii directori ai normalei la suprafata.

3.1.1. *Suprafete explicite.* In aplicatii este foarte importanta panza definita explicit. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ de clasa C^1, D un domeniu marginit care are arie. Suprafata explicita este un caz particular de suprafata parametrizata

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y),\ (x, y) \in D. \end{cases}$$

$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x,y)\vec{k}$. Notam cu $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ si $q = \frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix}.$$

Orice suprafata explicita de clasa C^1 este neteda deoarece $A^2 + B^2 + C^2 = 1 + p^2 + q^2 > 0$.